数　　学

三 角 函 数

一、同角三角函数关系

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

$= \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$

$= -\sin(\pi+\alpha) = \sin(\pi-\alpha)$

二、两角和差公式

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} \end{cases}$$

三、二倍角公式

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos\alpha = \frac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

四 三倍角公式

$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

五、降幂公式

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin2\alpha}{2}$$

六、半角公式

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}} = \frac{1-\cos2\alpha}{\sin2\alpha} = \frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}$$

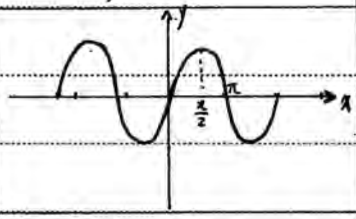
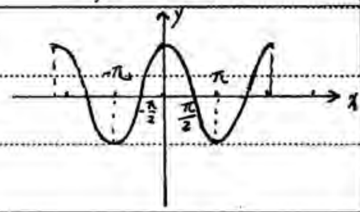
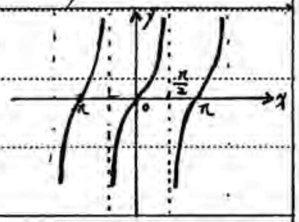
七、万能公式

$$\sin2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2x}$$

$$\cos2x = \frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$$

$$\tan2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$$

三角函数图象及其性质

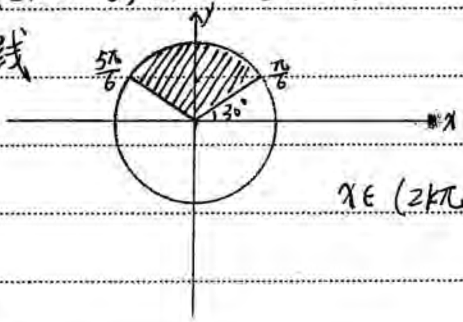
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
周期	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$
奇偶性	奇	偶	奇
单调增区间	$[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ $(k\in Z)$	$[2k\pi-\pi, 2k\pi]$ $(k\in Z)$	$[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}]$ $(k\in Z)$
单调减区间	$[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ $(k\in Z)$	$[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ $(k\in Z)$	/
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x=k\pi$	/
中心	$(k\pi, 0)$	$(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{k\pi}{2}, 0)$

例1. 解不等式

(1) $\sin x > \frac{1}{2}$

解：(1) 图象 $x \in (2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6})$. $k \in Z$

(2) 三角函数线

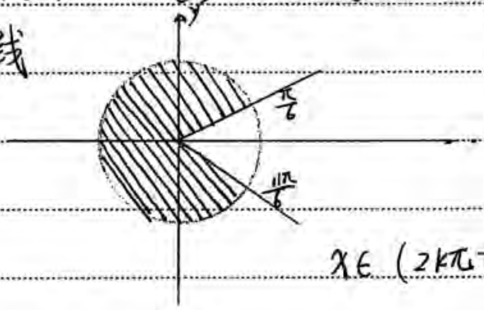


$x \in (2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6})$. $k \in Z$

(2) $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

解：(1) 图象： $x \in (2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{11\pi}{6})$ $k \in Z$

(2) 三角函数线

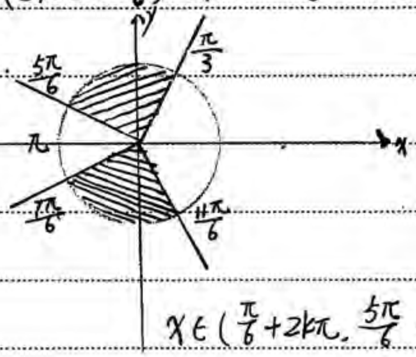


$x \in (2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{11\pi}{6})$. $k \in Z$

(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2}$

解：(1) 图象： $x \in (2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6}) \cup (2k\pi+\frac{7\pi}{6}, 2k\pi+\frac{11\pi}{6})$ $k \in$

(2) 三角函数线

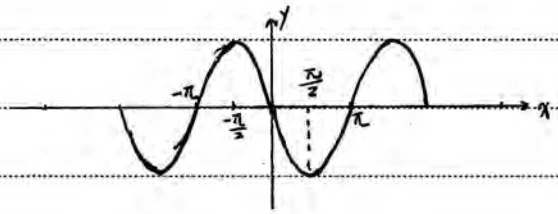


$x \in (\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi) \cup (\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k$

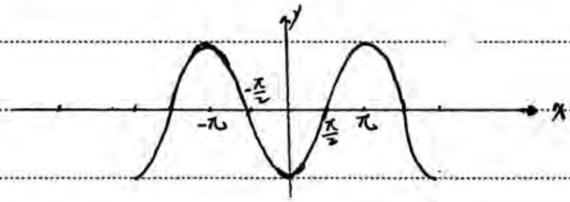
$k \in Z$.

2. 画出下列函数图像

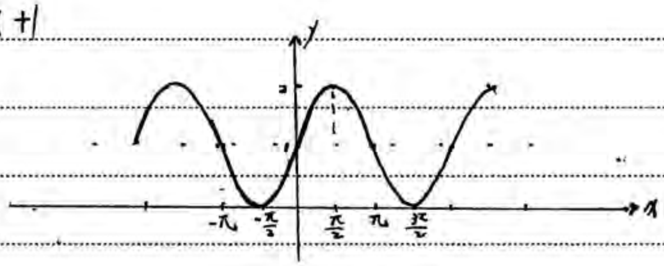
(1) $y = -\sin x$



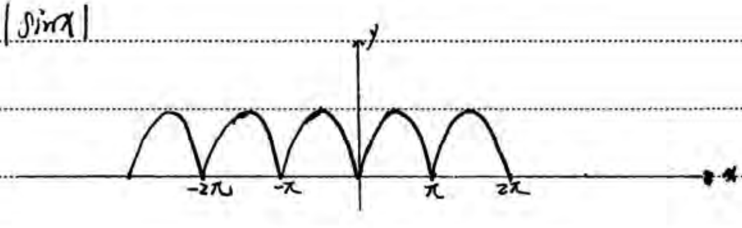
(2) $y = -\cos x$



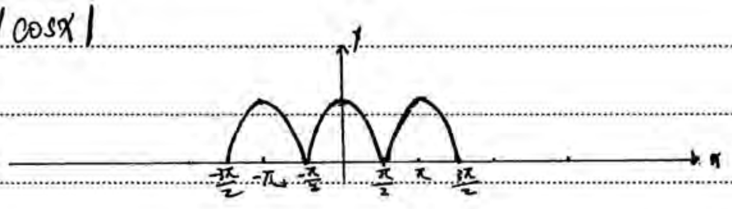
(3) $y = \sin x + 1$



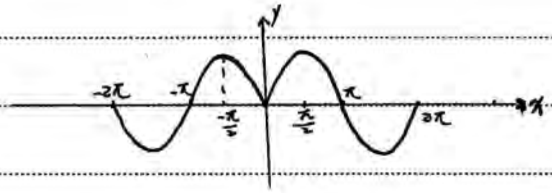
(4) $y = |\sin x|$



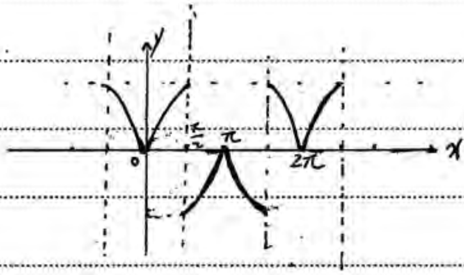
(5) $y = |\cos x|$



(6) $y=\sin|x|$



(7) $y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$



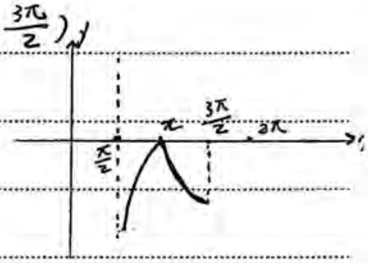
(8) $y=\cos x\cdot|\tan x|$

解: $y=\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\cdot\cos x$

$\begin{cases}(\cos x\geq 0,\ x\in[k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]),\ y=|\sin x|=\sin x\\(\cos x<0,\ x\in[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi],\ y=|\sin x|=-\sin x\end{cases}$

(9) $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$, $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

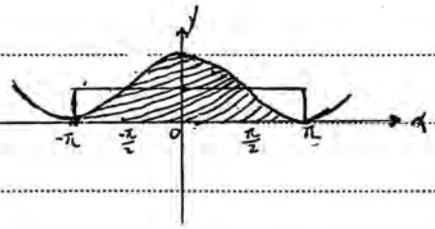
解: $y=\begin{cases}2\tan x, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\\2\sin x, & x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})\end{cases}$



3. 求$y=\cos x+1$与x轴围成封闭曲线在$[-\pi,\pi]$之间的面积

解: $S=\frac{\pi}{2}\times 1+(2\pi-\frac{\pi}{2}\times 1)$

$=2\pi$



4. 求下列函数的增区间.

(1) $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

解: $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$

$\therefore\ x\in\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{\pi}{12}\right]\ k\in Z$

(2) $y=\sin(-2x+\frac{\pi}{3})$

解：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le-2x+\frac{\pi}{3}\le2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $y=-\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

$\therefore\ -k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le-k\pi+\frac{5\pi}{12}$ $\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}\le2x-\frac{\pi}{3}\le2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

$\therefore\ x\in\left[-k\pi-\frac{\pi}{12},\ -k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$ $\therefore x\in\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]k\in Z$

$y=-\sin($

(3) $y=\lg(\sin x+\cos x)$

解：$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$ $\therefore\ y=\lg\left[\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\right]$

$\therefore 0<\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\le\sqrt{2}$ $\therefore 2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le2k\pi+\frac{\pi}{2}$, x

$\therefore\ 2k\pi-\frac{\pi}{4}\le x\le2k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in Z)$

$\because\ y=\lg(\sin x+\cos x)$ 单调递增

$\therefore$ 增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$. $(k\in Z)$

(4) $y=\sin(\cos x)$

解：设 $y=\sin u$. $u=\cos x\in[-1,1]$

$\therefore\ y=\sin u$ 单调递增

只需求 $\cos x$ 增区间

$\therefore\ x\in\left[2k\pi-\pi,\ 2k\pi\right]\ k\in Z$

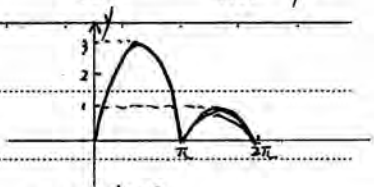
5. $y=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 若$y=k$有两个不同根，求k范围。

解：(1) 当 $x=0$或π或2π时 $y=\begin{cases}3\sin x & x\in[0,\pi]\\ 1-\sin x & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$

$y=0$ $\therefore$ 不合题意

(2) 当 $x\in(0,\pi)$ 时：$\sin x>0$

$\therefore\ y=3\sin x=k$ $\therefore\ \sin x=\frac{k}{3}$



$\therefore 0<\frac{k}{3}<1 \quad \therefore 0<k<3$

(3) 当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0$

$\therefore y=-\sin x=k$, $\therefore \sin x=-k$ $\quad \therefore 1<k<3$

$\therefore -1<-k<0$ $\quad \therefore 0<k<1$ $\quad \therefore k\in(1,3)$

$\therefore$ 综上: $k\in(0,3)$

二. $y=A\sin(wx+\varphi)+h$ 性质 $(A>0, h>0)$

1. 最大值 $A+h$ 最小值 $-A+h$
2. 周期 $T=\frac{2\pi}{|w|}$

   频率 $f=\frac{1}{T}$ 相位 $wx+\varphi$ 初相: φ
3. 对称轴 $wx+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$

   $\Rightarrow x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{w}$
4. 对称中心: 图象与 $y=h$ 的交点为对称中心
5. 若 $y=A\sin(wx+\varphi)+h$ 为奇函数 $\Leftrightarrow h=0$, $\varphi=k\pi$, $(k\in Z)$

   若 $y=A\sin(wx+\varphi)+h$ 为偶函数 $\Leftrightarrow \varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $(k\in Z)$

三. 函数 $y=A\sin(wx+\varphi)$

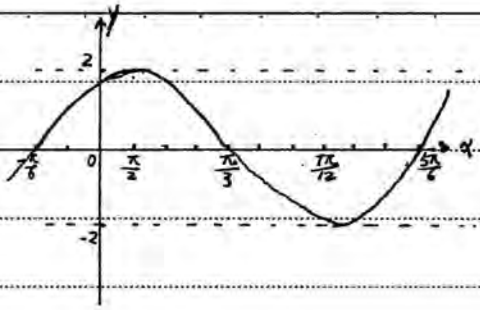
1. 五点法画图象

   例: 画 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象

   步骤: ① 列表 ② 描点 ③ 连线

   解:

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0



2. A. w. φ 对图象的影响

A：图象上所有点横坐标不变，纵坐标缩短或伸長

φ：图象左右平移

w：图象上所有点纵坐标不变，横坐标缩短或伸長.

3. 由 $y=\sin x$ 经平移和伸缩后得到 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

（法一）：先平移后伸缩

$y=\sin x \xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位}} y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 每次变换都是相对x而言

$\xrightarrow[\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}]{\text{纵坐标不变}} y=\sin(2x+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow[\text{纵坐标变为原来2倍}]{\text{横坐标不变}} y=\sin2(2x+\frac{\pi}{3})$

（法二）：先伸缩后平移

$y=\sin x \xrightarrow[\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{2}]{\text{纵坐标不变}} y=\sin 2x \xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位}} y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

$\xrightarrow[\text{纵坐标变为原来的2倍}]{\text{横坐标不变}} y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

4. 由 $y=A\sin(wx+\varphi)$ 的图象求函数解析式

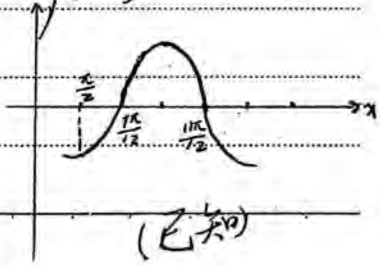
例1：(1) $f(x)=A\cos(wx+\varphi)$ $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{3}$，求 $f(0)$

解：$T=2\times(\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12})=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{w}$ $\therefore w=3$

$\therefore f(x)=A\sin(3x+\varphi)$

$\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$ $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$

$\therefore f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{3}$



（已知）

$\therefore f(0)=f(\frac{2\pi}{3})=\frac{2}{3}$

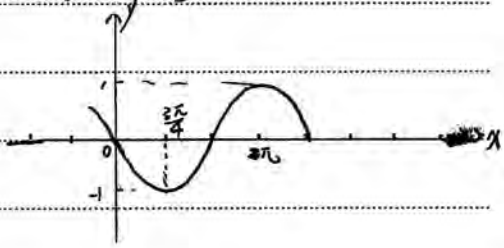
(2) $y=\sin(wx+\varphi)$ $(w>0,\ -\pi\le\varphi\le\pi)$，求$\varphi$

解：$T=\frac{2\pi}{w}$，$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{w}=2\pi-\frac{3\pi}{4}$ $\therefore w=\frac{4}{5}$

$\therefore y=\sin(\frac{4}{5}x+\varphi)$

$\therefore -1=\sin(\frac{4}{5}\times\frac{3\pi}{4}+\varphi)$

$\therefore \varphi=\frac{9\pi}{10}$



(3) $y=A\sin(wx+\varphi)$ $(A>0,\ w>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$

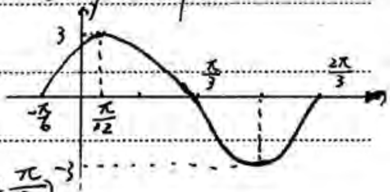
解：$T=2\times(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\pi=\frac{2\pi}{w}$ $\therefore w=2$

$\therefore y=A\sin(2x+\varphi)$，$A=3$ $\therefore y=3\sin(2x+\varphi)$

最高点对应横坐标为$\frac{\pi}{12}$

$\therefore 3=3\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$ $\therefore y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$



(4) $y=A\sin(wx+\varphi)$ $(A>0,\ w>0)$ 图象在y轴右侧第一个最高点 $M(2,2\sqrt{2})$，与x轴在原点右侧第一个交点 $N(6,0)$，求解析式

解：$T=2\times2\times(6-2)=16=\frac{2\pi}{w}$ $\therefore w=\frac{\pi}{8}$

$\therefore y=A\sin(\frac{\pi}{8}x+\varphi)$ $A=2\sqrt{2}$

$\therefore y=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\varphi)$

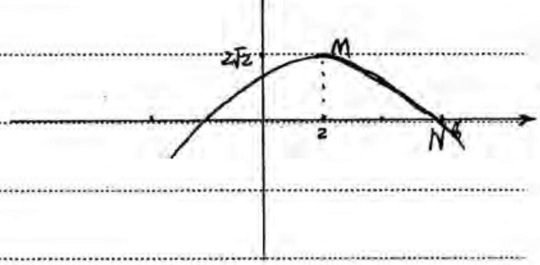
把$M(2,2\sqrt{2})$代入：

$2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)$

$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in Z)$

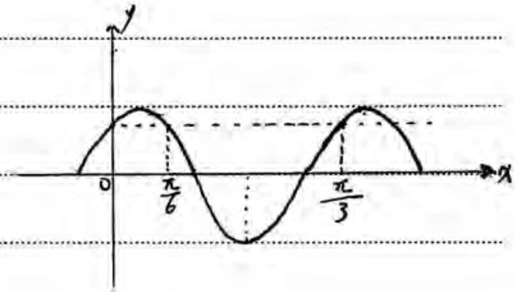
$\therefore y=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})$



(5) $y=\sin(wx+\frac{\pi}{3})$ $(w>0)$ $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{3})$ 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上有最小值，无最大值。求 w

解: $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$

∴ 最低点为 $(\frac{\pi}{4},-1)$



∴ $-1=\sin(\frac{\pi}{4}w+\frac{\pi}{3})$

∴ $\frac{\pi}{4}w+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

∴ $w=\frac{14}{3}+8k$ $(k\in Z)$

$T\geq\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

∴ $\frac{2\pi}{w}>\frac{\pi}{6}$ ∴ $0<w<12$

∴ $w=\frac{14}{3}$

(6) $y=A\tan(wx+\varphi)$ $(A>0, w>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2})$，与x轴相交两个相邻交点为 $(\frac{\pi}{6},0)$ 和 $(\frac{5\pi}{6},0)$ 且过点 $(0,-3)$，求解析式.

解: $T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{w}$ ∴ $w=\frac{3}{2}$

∴ $y=A\tan(\frac{3}{2}x+\varphi)$ 代入 $(\frac{\pi}{6},0)$ $(0,-3)$

∵与x轴交于 $(\frac{\pi}{6},0)$ ∴ $\varphi<0$

∴ $\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi=0$ ∴ $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

∴ $y=A\tan(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

∴ $-3=A\tan(-\frac{\pi}{4})$ ∴ $A=3$

∴ $y=3\tan(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

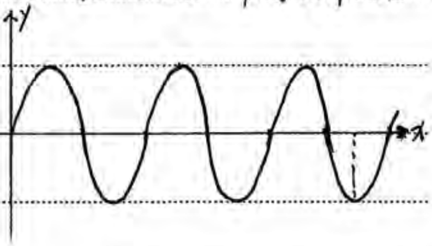
∴ $\begin{cases}0=A\tan(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi)\\-3=A\tan\varphi\end{cases}$

∴ $\tan(\frac{\pi}{4}+\varphi)=0$

∴ $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi$ ∴ $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}$ ∴ $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

∴ $y=3\tan(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})$

(7) $y=\sin wx$ $(w>0)$ 在 $[0,1]$ 恰好有3个最大值，3个最小值，求 w 范围.



解: $T=\frac{2\pi}{w}$

$(2+\frac{3}{4})T\leq 1\leq(3+\frac{1}{4})T$

∴ $\frac{11}{4}\cdot\frac{2\pi}{w}\leq 1<\frac{13}{4}\cdot\frac{2\pi}{w}$

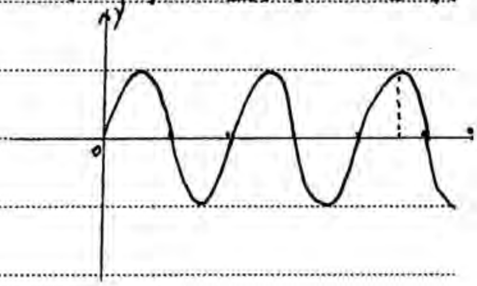
$\therefore \ \frac{11}{2}\pi \le w \le \frac{13}{2}\pi$

(8) $y=\sin wx \ (w>0)$ 在$[0,1]$恰好有3个最大值，求w范围。

解: $(2+\frac{1}{4})T \le 1 \le (3+\frac{1}{4})T$

$\therefore \ \frac{9}{4}\cdot\frac{2\pi}{w} \le 1 < \frac{13}{4}\cdot\frac{2\pi}{w}$

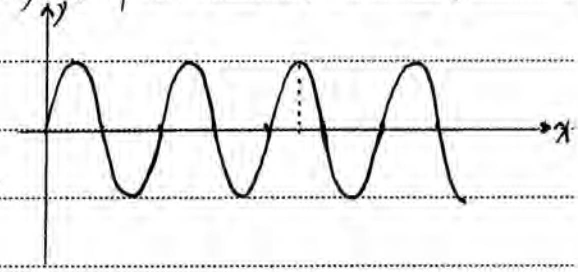
$\therefore \ \frac{9\pi}{2} \le w < \frac{13}{2}\pi$



(9) $y=\sin wx \ (w>0)$ 在$[0,1]$至少有3个最大值，求w范围.

解: $(2+\frac{1}{4})T \le 1$

$\therefore \ w \ge \frac{9\pi}{2}$



5. 三角综合应用

例1: $f(x)=\sin 2x - 2\sin^2 x$

(1) 求$f(x)$最小正周期

(2) 求$f(x)$最值及相应x值

解: (1) $f(x)=\sin 2x - 1 + \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x - 1$

$= \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}) - 1$

$\therefore \ T=\frac{2\pi}{|w|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2) ①: $f(x)_{max}=\sqrt{2}-1$

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\therefore \ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \ (k\in Z)$

②: $f(x)_{min}=-\sqrt{2}-1$

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

$\therefore x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\ (k\in Z)$

例2: $f(x)=1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{8})+2\sin(x+\frac{\pi}{8})\cos(x+\frac{\pi}{8})$

(1) 求周期 (2) 求单调增区间

解: $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})+\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos 2x$

(1) $T=\frac{2\pi}{|w|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2) $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{2}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ k\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le k\pi$

$\therefore$ 单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi]\ (k\in Z)$

例3: $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$. 直线 $x=t\ (t\in R)$ 与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 图象分别交于M.N

(1) 当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时, 求 $|MN|$

(2) 当 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $|MN|$ 最大值

解: 设 $M(t, \sin 2t)$, $N(t, \cos(2t+\frac{\pi}{6}))$

(1) $M(\frac{\pi}{4}, 1)$ $N(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$

$\therefore\ |MN|=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

(2) $|MN|=|\sin 2t-\cos(2t+\frac{\pi}{6})|$

$=|\frac{3}{2}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t|=|\sqrt{3}\sin(2t+\frac{5\pi}{6})|$

$\because 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. $\therefore \frac{5\pi}{6}\le 2t+\frac{5\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}$

$\therefore\ |MN|_{max}=\sqrt{3}$

例4. $f(x)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+x)-\sqrt{3}\cos 2x$, $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

(1) 求 $f(x)$ 最值

(2) 若 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 恒成立. 求m范围

解: $f(x)=1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})-\sqrt{3}\cos 2x$

$= 1+\sin x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$

(1) $f(x)_{min} = 2\times\frac{1}{2}+1=2$ $\qquad 2x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ $\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$

$f(x)_{max} = 2\times 1+1=3$

(2) $|2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1-m|<2$ 在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上恒成立

$\therefore -2<2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1-m<2$. $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$\therefore -3<2\sin(2x-\frac{\pi}{3})-m<1$ 恒成立. $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$\because x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ $\quad\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$

$\therefore -2\le 2\sin(2x-\frac{\pi}{3})\le 0$ $\quad f(x)-2<M<f(x)+2$

$\therefore -2-m\le 2\sin(2x-\frac{\pi}{3})-m\le -m$ $\quad\therefore 3-2<m<2+2$

$\therefore\begin{cases}-2m\le -3\\ -m\ge 1\end{cases}$ $\quad\therefore 1<m<4$

三角函数最值问题

常用公式: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$. $\tan\varphi=\frac{b}{a}$

$a\sin\alpha-b\cos\alpha$ 有界性 $|a\sin\alpha|\le|a|$

$\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 关系

题型一: 形如 $y=a\sin\alpha+b$ ($y=a\cos\alpha+b$)

$y_{max}=|a|+b$ $\quad y_{min}=-|a|+b$

题型二: 形如. $y=a\sin x+b\cos x$

$y_{max}=\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad y_{min}=-\sqrt{a^2+b^2}$

例1: 求$y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$, $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$. 求最值.

解： $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\because x\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ $\therefore x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$

$\therefore y_{min}=2\sin\frac{5\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$

$y_{max}=2\times1=2$

题型三：形如 $y=a\cos^2x+b\sin^2x+c\cdot\cos x\cdot\sin x$

分析：函数为关于 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的齐次式，则需要利用降幂公式，辅角公式化成一个三角式。

例2：求 $y=2\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x$ 的周期，最值，单调增区间。

解：$y=1+\cos2x-\sin2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$

① $T=\frac{2\pi}{|w|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

② $y_{max}=\sqrt{2}+1$ $y_{min}=-\sqrt{2}+1$

③ $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le2x-\frac{\pi}{4}\le2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$

$\therefore k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8}$

$\therefore$ 单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}]$，$k\in Z$

题型四：形如 $y=a\cos^2x+b\cos x+c$

分析非齐次换元转化为二次函数问题

例3：(1) 求 $y=\sin^2x-\sin x+1$ 值域

解：设 $\sin x=t$，$t\in[-1,1]$

$\therefore y=t^2-t+1=t^2-t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$\therefore y_{min}=\frac{3}{4}$，$y_{max}=3$

$\therefore y\in[\frac{3}{4},3]$

(2) 求 $y=\cos^2x-3\sin x$ 值域

解：$y=1-\sin^2x-3\sin x=-t^2-3t+1=-(t^2+3t-1)$

$=-(t+\frac{3}{2})^2+\frac{13}{4}$

$\because t\in[-1,1]$

$\therefore y_{min}=-3,\ y_{max}=3$

$\therefore y\in[-3,3]$

(3) 求$y=2-4\sin x-\cos 2x$最值

解: $y=2-4\sin x-(2\cos^2 x-1)$

$=2-4\sin x-2\cos^2 x+1$

$=3-4\sin x-2(1-\sin^2 x)$

$=2\sin^2 x-4\sin x+1=2t^2-4t+1,\ t\in[-1,1]$

$\therefore y=2(t-1)^2-1$

$\therefore y_{min}=-1,\ y_{max}=7$

题型五: 形如 $y=a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cdot\cos x$

分析: 利用$\sin x\pm\cos x$与$\sin x\cos x$的关系换元

例4 (1) 求$y=\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x$最值

解: 设 $\sin x+\cos x=t,\ t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

则 $\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)=\frac{1}{2}(t^2+2t+1-2)$

$=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$

$\therefore y_{min}=-1,\ y_{max}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

(2) 求$y=(\sin x+1)(\cos x+1)$当$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$时的最小值

解: $y=\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x+1$

设 $\sin x+\cos x=t,\ t\in[\frac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}]$

则 $\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}$

$y=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}+t+1=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$

$\therefore y_{min}=\frac{2+\sqrt{3}}{4},\ y_{max}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+1)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

题型六 形如：$y=\frac{c\sin x+d}{a\sin x+b}$

例：$y=\frac{3\sin x+1}{a\sin x+b}$

分析：利用 $\sin x$ 的有界性

解：$y(\sin x+2)=\frac{2y+1}{3-y}$

$\therefore |\sin x|=\left|\frac{2y+1}{3-y}\right|\le 1$

$\therefore (2y+1)^2\le(3-y)^2$ $\therefore y\in[-4,\frac{2}{3}]$

例4. 求 $y=\frac{2\cos x}{\cos x+2}$ 最值

解：$y\cdot\cos x+2y=-2y$

$\cos x=\frac{2y}{2-y}$

$\therefore |\cos x|=\left|\frac{2y}{2-y}\right|\le 1$

$\therefore 4y^2\le 4-4y+y^2$

$\therefore y\in[-2,\frac{2}{3}]$

题型七：形如 $y=\frac{c\cdot\cos x+d}{a\cdot\sin x+b}$

分析：同题型六，用辅助角公式，再利用有界性

例5. 求 $y=\frac{3\cos x-1}{\sin x+2}$ 最值

方法一：解：$\sin x\cdot y+2y=3\cos x-1$

$\therefore y\cdot\sin x-3\cos x=-1-2y$

$\therefore \sqrt{y^2+9}\sin(x+\varphi)=-1-2y$

$\therefore \sin(x+\varphi)=\frac{-1-2y}{\sqrt{y^2+9}}$

$\therefore \left|\frac{-1-2y}{\sqrt{y^2+9}}\right|\le 1$

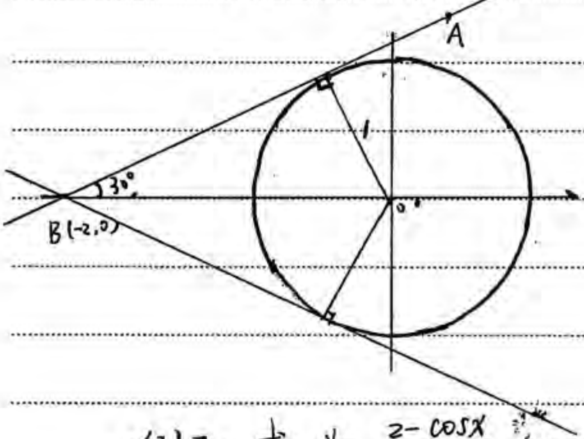
$\therefore (1+2y)^2\le y^2+9$

$\therefore y\in\left[\frac{-2-2\sqrt{7}}{3},\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right]$

例6：求 $y=\frac{2\cos x}{\sin x+2}$ 的最值

方法二：解：$\frac{y}{2}=\frac{\cos x-0}{\sin x-(-2)}$

设 A ($\sin x$, $\cos x$). B(-2,0)

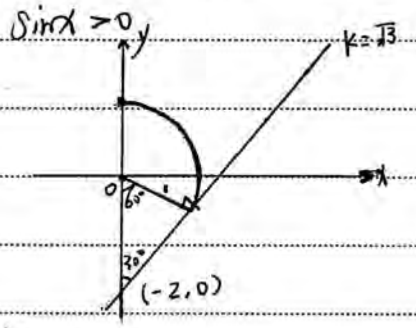


$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \le \frac{y}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore y \in [-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

例7: 求 $y=\frac{2-\cos x}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$ 最值 . 无限利用方法-

解: 设 A ($\sin x$, $-\cos x$) , B(0, -2)



题型八. 复合函数

例7: 求 $y=\frac{\sin^2 x-5\sin x+7}{3-\sin x}$ 最值

解: $y=\frac{(3-\sin x)^2+\sin x-2}{3-\sin x}=\frac{(3-\sin x)^2-(3-\sin x)+1}{3-\sin x}$

$=(3-\sin x)+\frac{1}{3-\sin x}-1$

设 $t=3-\sin x$, $t\in[2,4]$

$y=t+\frac{1}{t}-1$

$\therefore y'=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}>0$

$\therefore y=t+\frac{1}{t}-1$ 在 $t\in[2,4]$ 单调递增

$\therefore y_{min}=2+\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}$, $y_{max}=4+\frac{1}{4}-1=\frac{13}{4}$

集合

一、集合

1. 集合含义

一般地，把研究对象统称为元素，把一些元素组成的整体叫做集

2. 集合中元素的三个特征

确定性 互异性 无序性

3. 元素与集合的关系

(1) 属于：a是集合A的元素，则称 $a \in A$

(2) 不属于：a不是集合A的元素，则称 $a \notin A$

注：$\in$、$\notin$ 永远表示元素与集合的关系

4. 常用数集

正整数集：N^* 或 N_+

自然数集（非负整数集）：N

整数集：Z

有理数集：Q

实数集：R

复数集：C

二、集合的表示方法

1. 列举法

注：用来表示有限集或具有显著规律的无限集

2. 描述法：

定义：用集合中所含元素的共同特征表示集合

注：格外注意代表元素

例如：$A=\{x|y=x^2\}$ => $x\in R$

$B=\{y|y=x^2\}$ => $y\in[0,+\infty)$

$C=\{(x,y)|y=x^2\}$ => 抛物线 $y=x^2$ 上所有点的坐标

三、集合间的关系

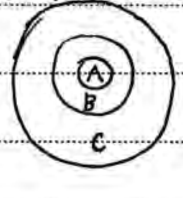
1. 子集

(1) 定义

对于两个集合A B 如果A中的任意一个元素都是B中的元素，称A为B的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$

(2) 韦恩图：内平面内封闭的曲线的内部表示集合

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$



(3) 集合相等

若集合A是集合B的子集，且B是A的子集，则集合AB相等

(4) 真子集

若A是B的子集，但存在 $x\in B$ 且 $x\notin A$，称A是B的真子集。

记作 $A\subsetneqq B$

2. 空集

如果一个集合中不含任何元素，称这个集合为空集，记作 $\varnothing$.

规定：空集是任何一个集合的子集

空集是任何非空集合的真子集

结论：若集合A含有n个元素，则A的子集个数为 2^n 个，非空子

集为 2^n-1 个，非空真子集为 2^n-2 个.

例1. 用"$\in$" "$\notin$" "$\subseteq$" "$\subsetneqq$" "$\nsubseteq$"填空

(1) $0 \in \{0\}$ (2) $0 \notin \emptyset$ (3) $\emptyset \subsetneqq \{0\}$ (4) $\{0,1\} \nsubseteq \{(0,1)\}$

(5) $\pi \notin Q$ (6) $\{3.14\} \nsubseteq \emptyset$

例2. $A=\{x \mid ax^2-3x+2=0,\ a\in R,\ x\in R\}$

(1) 若A为$\emptyset$，求a范围.

(2) 若A中只有1个元素，求a范围。

(3) 若A中至多有1个元素，求a范围.

解：(1) $\Delta = 9-8a<0$

$\therefore a>\frac{9}{8}$ $\therefore a\in(\frac{9}{8},+\infty)$

(2) ① $\Delta=9-8a=0$ ② 当 $a=0$ 时，$x=\frac{2}{3}$ $\therefore$ 成立

$\therefore a=\frac{9}{8}$ 或 0

(3) ① $\Delta=9-8a\le 0$ ② 当 $a=0$ 时，$x=\frac{2}{3}$. $\therefore$ 成立

$\therefore a\ge\frac{9}{8}$. $\therefore a=0$ 或 $a\ge\frac{9}{8}$

例3. $A=\{x \mid 0<ax+1\le 5\}$，$B=\{x \mid -\frac{1}{2}<x\le 2\}$，若 $A\subseteq B$，求a范围

解：$0<ax+1\le5$ $\therefore -1<ax\le 4$

①若 $a=0$ 时，则 $x\in R$，与 $A\subseteq B$ 矛盾 $\therefore a\ne 0$

②当 $a>0$ 时

$A=\{x \mid -\frac{1}{a}<x\le\frac{4}{a}\}$

$\because A\subseteq B$ $\therefore \begin{cases} -\frac{1}{a}\ge-\frac{1}{2} \\ \frac{4}{a}\le 2\end{cases}$ $\therefore a\ge 2$

③当 $a<0$ 时.

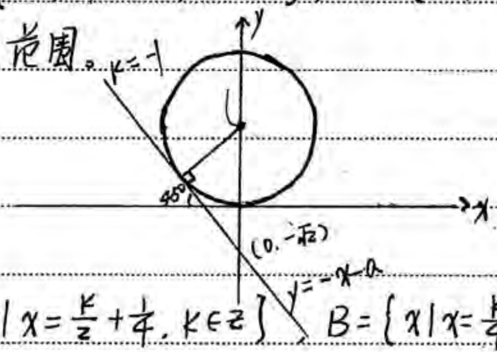
$A=\{x|\frac{4}{a}\le x\le -\frac{1}{a}\}$

∵ $A\subseteq B$ ∴ $\begin{cases} -\frac{1}{2} < \frac{4}{a} \\ -\frac{1}{a} \le 2 \end{cases}$ ∴ $a<-8$

∴ 综上 $a\ge 2$ 或 $a<-8$

例4. $A=\{(x,y)|\ x^2+(y-1)^2=1\}$, $B=\{(x,y)|x+y+a\ge 0\}$. 若 $A\subseteq B$ 求 a 范围。

解:



∴ $-a\ge 1-\sqrt{2}$

∴ $a\le \sqrt{2}-1$

例5. $A=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in Z\}$, $B=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in Z\}$. 则 A.B 关系为 $A\subsetneqq B$

法一: 列举法

法二: 改变集合表达式

$A=\{x|\ x=\frac{2k+1}{4}, k\in Z\}$ $B=\{x|\ x=\frac{k+2}{4}\}$

$2k+1$ 为奇数, $k+2$ 奇偶皆可

∴ $A\subsetneqq B$

例6. $A=\{x|\ x=\cos\frac{n}{3}\pi, n\in Z\}$, $B=\{x|\ x=\sin\frac{2m-3}{6}\pi, m\in Z\}$

则 A.B 关系为 $A=B$

解: $A=\{x|x=\cos\frac{2n}{6}\pi, n\in Z\}$, $B=\{x|x=-\cos\frac{2n}{6}\pi, m\in Z\}$

∴ $A=B$

例7: $A=\{x|\ x=a+\frac{1}{6}, a\in Z\}$, $B=\{x|\ x=\frac{b}{2}-\frac{1}{3}, b\in Z\}$

$C=\{x|\ x=\frac{c}{2}+\frac{1}{6}, c\in Z\}$ 则 A.B.C 关系为 $A\subsetneqq B$. $B=C$

解: $A=\{x|\ x=\frac{6a+1}{6}=\frac{3\times 2a+1}{6}, a\in Z\}$, $B=\{x|\ x=\frac{3b-2}{6}=\frac{3(b+1)+1}{6}$

$C=\{x \mid x=\frac{3c+1}{6},\ c\in R\}$

$6a+1$ 为奇数. $3b-2$ 为奇偶，$3c+1$ 为奇偶

$\therefore\ A \subsetneqq B.\quad B=C$

四. 集合的基本运算

1、交集： $A\cap B=\{x \mid x\in A 且 x\in B\}$

并集： $A\cup B=\{x \mid x\in A 或 x\in B\}$

补集： $C_UA=\{x \mid x\in U 且 x\notin A\}$

2. 性质

(1) 并集. 交集的性质

① $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$

② $A\cap A=A$，$A\cup A=A$

③ $A\cap\emptyset=\emptyset$，$A\cup\emptyset=A$

④ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

⑤ $A\cap B=A \Leftrightarrow A\subseteq B$

$A\cup B=A \Leftrightarrow B\subseteq A$

⑥ $A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$

(2) 补集的性质

① $A\cup(C_UA)=U$

② $A\cap(C_UA)=\emptyset$

③ $C_U(C_UA)=A$

④ $C_U(A\cap B)=C_UA\cup C_UB$

⑤ $C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$

命 题

一. 命题.

1. 定义: 用语言符号或式子表达的可以判断正误的句子.

2. 分类:

$\begin{cases}\text{真命题}\\ \text{假命题}\end{cases}$ $\begin{cases}\text{简单命题}\\ \text{复合命题}\end{cases}$

二. 四种命题

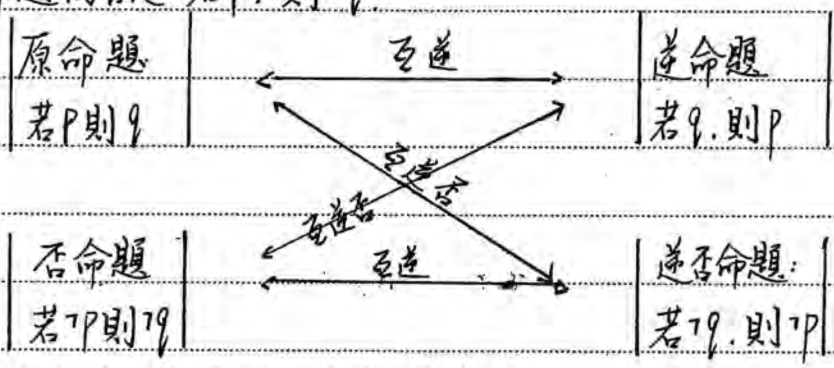
原命题: 若p, 则q

逆命题: 若q, 则p

否命题: 若$\neg p$, 则$\neg q$

逆否命题: 若$\neg q$, 则$\neg p$

命题的否定: 若p, 则$\neg q$.



※ 互为逆否命题的两个命题等价

区分否命题与命题的否定

否命题: 条件与结论都否定

命题的否定: 只否定结论

3. 充分条件与必要条件.

1. 充分条件: 若p成立, 那么q成立, 则p是q的充分条件.

(若$p \Rightarrow q$, 则p是q的充分条件)

2. 必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 q 是 p 的必要条件.

3. 充要条件：若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件

4. 充分不必要条件：若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

5. 必要不充分条件：若 $q \Rightarrow p$ 且 $p \nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

6. 既不充分也不必要条件：若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件

四、充分条件和必要条件的判断方法

方法1：定义

方法2：利用集合观点

若命题 p 为集合 A，命题 q 为集合 B

① $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件

② $A \supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件

③ $A = B$，则 p 是 q 的充要条件

④ $A \nsubseteq B$ 且 $B \nsubseteq A$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件

例1：p：$|4x-3| \le 1$，q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1) \le 0$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求 a 范围.

解：p：$A=\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\}$，$q$：$B=\{x \mid a \le x \le a+1\}$

$\therefore \neg p$：$A'=\{x \mid x<\frac{1}{2} 或 x>1\}$，$\neg q$：$B'=\{x \mid x<a 或 x>a+1\}$

$\therefore A' \supsetneqq B'$

$\therefore$ ① $\begin{cases} a<\frac{1}{2} \\ a+1>1 \end{cases}$ $\therefore 0<a<\frac{1}{2}$ ③ $\begin{cases} a\le\frac{1}{2} \\ a+1>1 \end{cases}$ $\therefore 0<a\le\frac{1}{2}$

② $\begin{cases} a\le\frac{1}{2} \\ a+1>1 \end{cases}$ $\therefore 0<a\le\frac{1}{2}$

$\therefore$ 综上：$0 \le a \le \frac{1}{2}$

简单逻辑连结词和存在量词与全称量词

一、逻辑连接词.

1. 定义：命题中的"或""且""非"叫做逻辑连结词

2. 简单命题：不含逻辑连接词的命题

复合命题：由逻辑连接词与简单命题构成的命题.

p或q：$p\vee q$. p且q：$p\wedge q$. 非p：$\neg p$

3. 真假表：

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$
真	真	真	真
真	假	真	假
假	真	真	假
假	假	假	假

p	$\neg p$
真	假
假	真

"或""且""非"与集合中的"并""交""补"相对应

4. "或""且""非"的否定

"p或q"的否定：$\neg p$且$\neg q$. $\longleftrightarrow C_U(p\vee q)=(C_Up)\cap(C_Uq)$

"p且q"的否定：$\neg p$或$\neg q$. $\longleftrightarrow C_U(p\cap q)=(C_Up)\cup(C_Uq)$

二、全称量词与存在量词

1. 全称量词

"对所有的""对任意的"为全称量词，记作"$\forall$"

含有全称量词的命题为全称命题，记作：$\forall x\in M, p(x)$

3. 含有一个量词命题的否定

(1) 全称命题的否定

"$\forall x\in M, p(x)$" 否定为 "$\exists x_0\in M, \neg p(x)$"

(2) 特称命题的否定

"$\exists x_0\in M, p(x_0)$" 否定为 "$\forall x\in M, \neg p(x)$"

4. 常见词的否定

"$=$": $\neq$ $>$: $\leq$ 都是：不都是

至多有1个：至少有2个. 至少有1个：1个也没有

函数的概念和表示

一. 函数概念

1. 定义:

设A.B是两个非空数集. 如果按照某种确定的对应关系f. 使对于集合A中的任意一个数x. 在集合B中都有唯一确定的数f(x)与之对应. 那么称 $f: A\to B$. 从集合A到B的一个函数. 记作 $y=f(x)$: x叫做自变量. x的集合叫做函数定义域. 与x相对应的f(x)的值叫做函数值. 函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 为值域

值域是集合B的子集.

2. 函数的三要素

定义域: 对应关系. 值域

两个函数三要素都相同, 才说这两个函数为同一函数

二. 分段函数

定义:

在函数定义域内, 对于自变量x的不同取值有着不同对应法则

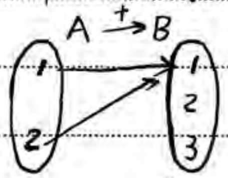
三. 映射.

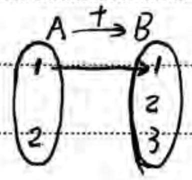
1. 定义:

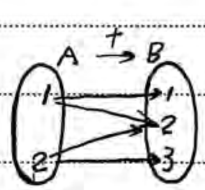
把函数定义中"非空数集"弱化为"非空集合"

2. 象. 原象

集合A中元素x对应集合B中元素y, 则x叫做y的原象, y叫做x的象.







① A中元素不能有剩余, B中可以剩余.

② A中多个可以对应B中一个元素, B中多个不能对应A中一个

3. 计算映射个数

A中有a个元素, B中有b个元素. 共有 b^a 个映射

四. 求函数解析式:

1. 拼凑法

例1: $f(x+1) = x^2+2x+3$

解: (1) $f(x+1) = (x+1)^2+2$

$\therefore f(x) = x^2+2$

换元法

(2) 设 $t=x+1 \Rightarrow x=t-1$

$\therefore f(t) = (t-1)^2+2(t-1)+3$

$\therefore f(t) = t^2+2$. 即 $f(x)=x^2+2$

练习1. $f(x+\frac{1}{x}) = x^3+\frac{1}{x^3}$, 求 $f(x)$

解: $f(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$

$= (x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$

$\therefore f(x) = x(x^2-3) = x^3-3x$

换元法 2: $f(\frac{2}{x}+1) = \lg x$, 求 $f(x)$

解：设 $t=\frac{2}{x}+1 \Rightarrow x=\frac{2}{t-1}$ ，$t\in[1,+\infty)$

$f(t)=\lg\frac{2}{t-1}$

即 $f(x)=\lg\frac{2}{x-1}$ ，$x\in(1,+\infty)$

2. 消元法

例2：$2f(x)+f(-x)=x-1$ ① ，求 $f(x)$

解：用 $-x$ 替换 x （令 $x=-x$：X）

$2f(-x)+f(x)=-x-1$ ②

①×2－②，得：

$3f(x)=3x-1$

$\therefore f(x)=x-\frac{1}{3}$

* 括号中的两个数具有一定对称性．

练习：1. $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x+1$ ①

解：用 $\frac{1}{x}$ 替换 x

$2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}+1$ ②

①×2－② 得：

$f(x)=2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$

2. $f(x)-2f(-\frac{1}{x})=3x$ ①

解：用 $-\frac{1}{x}$ 替换 x

$f(-\frac{1}{x})-2f(x)=-\frac{3}{x}$ ②

①＋②×2 得：

$f(x)=-x+\frac{2}{x}$

3. $2f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{x+1}{x})=x+1$ ①

解：用 $-x$ 替换 x

$2f\left(\frac{-x-1}{-x}\right)+f\left(\frac{-x+1}{-x}\right)=-x+1$ ②

①×2－② 得

$f\left(1+\frac{7}{x}\right)=-3x+1$

令 $t=1+\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t-1}$，$(t\neq 1)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}$

4 $f(2-x)+2f(x-2)=x$ ① $\Rightarrow f(2-x)+2f(x-2)=x-2+2$

解：用 $x-2$ 替换 $2-x$

$f(x-2)+2f(2-x)=2-x+2$ ②

①×2－② 得：

$f(x-2)=x-\frac{4}{3}$

令 $t=x-2 \Rightarrow x=t+2$

$f(x)=x+\frac{2}{3}$

5 $f(x)+2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$ ①

解：用 $\frac{1-x}{1+x}$ 替换 x

$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+2f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ②

① － ②×2 得：

$f(x)=-\frac{x^2+3x-2}{3(x+1)}$

3. 待定系数法：

例3：已知：一次函数 $f(x)$ 满足 $f\{f[f(x)]\}=8x-7$，求 $f(x)$

解：设 $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$

$\therefore f(x)=kx+b$

$\therefore f[f(x)]=k(kx+b)+b$

$\therefore f\{f[f(x)]\}=k[k(kx+b)+b]+b=8x-7$

即：$k^3x+(k^2b+kb+b)=8x-7$

$\therefore \begin{cases} k^3=8 \\ k^2b+kb+b=-7 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} k=2 \\ b=-1 \end{cases}$

$\therefore f(x)=2x-1$

题干中已知函数类型

4. 特值法（抽象函数）

例4：$f(0)=1$，$f(x-y)=f(x)+y(2x-y+1)$，求$f(x)$

解：令$x=y$得：

$f(0)=f(x)+x(2x-x+1)=1$

$\therefore f(x)=-x^2-x+1$

5. 运用数列递推关系

例5：$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且$f(1)=a$ $(a\neq 0)$，求$f(n)$，$n\in N^+$

解：令$x=n$，$y=1$得：

$f(n+1)=f(n)+f(1)=f(n)+a$

$\therefore f(n+1)=f(n)+a$

$\therefore f(n)=a+(n-1)a=na$

求函数定义域

一、解析式有意义

1. 偶次根号下非负

2. 分母不为0

3. 对数函数真数大于0，底数大于0且不等于1

4. 0的0次方（即0^0）无意义

5. 三角

二、复合函数的定义域

1. 已知$f(x)$定义域，求$f(g(x))$定义域

例1：$f(x)$定义域为$[0,1]$，求$f(2x-1)$的定义域

解: $0 \le 2x-1 \le 1$

$\therefore x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$\therefore f(2x-1)$ 定义域为 $[\frac{1}{2}, 1]$

2. 已知 $f(g(x))$ 的定义域，求 $f(x)$ 定义域

例2. $f(2x+2)$ 定义域为 $(2,3)$，求 $f(x)$ 定义域

解: $\because 2 < x < 3$

$\therefore 6 < 2x+2 < 8$

$\therefore f(x)$ 定义域为 (6.8)

3. 已知 $f(g(x))$ 定义域，求 $f[p(x)]$ 定义域

例3: $f(x+2)$ 定义域为 $(1,2)$，求 $f(3x-1)$ 定义域.

解: $\because 1 < x < 2$

$\therefore 3 < x+2 < 4$

$\therefore 3 < 3x-1 < 4$

$\therefore \frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$

$\therefore f(3x-1)$ 定义域为 $(\frac{4}{3}. \frac{5}{3})$

三、实际问题中定义域

具体分析

练习:

1. 求定义域

(1) $y = \frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$

解: $\begin{cases} x \neq 0 \\ -x^2-3x+4 \geq 0 \end{cases}$

$\therefore x \in [-4,0) \cup (0,1]$

(2) $y = \frac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$

解: $\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ |x|-x > 0 \end{cases}$

$\therefore x \in (-1,0)$

(3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)}$

解: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)\geq 0 \Rightarrow & x^2-2x\leq 1 \\ x^2-2x>0 & \therefore x\in[1-\sqrt{2},0)\cup(2,1+\sqrt{2}] \end{cases}$

(1) 已知$f(x)$定义域为$[0,1]$，求$y=f(3-2x)$和$y=f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$定义域

解: $\because 0\leq x\leq 1$

$\therefore 0\leq 3-2x\leq 1$

$\therefore 1\leq x\leq \frac{3}{2}$

$\therefore y=f(3-2x)$定义域为$[1,\frac{3}{2}]$

$\begin{cases} 0\leq x+\frac{1}{4}\leq 1 \\ 0\leq x-\frac{1}{4}\leq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

$\therefore y=f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$定义域为$[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

(2) 已知$f(2x-5)$定义域为$[2,4]$，求$f(x)$定义域

解: $\because 2\leq x\leq 4$

$\therefore -1\leq 2x-5\leq 3$

$\therefore f(x)$定义域为$[-1,3]$

(3) 已知$f(2^x)$定义域为$[-1,1]$，求$f(\log_2 x)$定义域

解: $\because -1\leq x\leq 1$

$\therefore 2^x\in[\frac{1}{2},2]$

$\therefore \frac{1}{2}\leq \log_2 x\leq 2$

$\therefore \sqrt{2}\leq x\leq 4$

$\therefore f(\log_2 x)$定义域为$[\sqrt{2},4]$

(4) $f(x)$定义域为$[0,1]$，求$f(x)=f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域

解: $\because 0\leq x\leq 1$

$\therefore \begin{cases} 0\leq x+a\leq 1 \\ 0\leq x-a\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a\leq x\leq 1-a \\ a\leq x\leq 1+a \end{cases}$

① 当$0<a<\frac{1}{2}$时，定义域为$[a,1-a]$

③ 当 $a>\frac{1}{2}$ 时. 定义域为 ϕ

函数的值域和最值

一. 求函数值域的方法

1. 观察法

例1: (1) $y=\sqrt{x}$ (2) $y=\sqrt{4-x^2}$ (3) $y=x+\sqrt{2x-1}$

解: $y\geq 0$ 解: $0\leq y\leq 2$ 解: $y\geq\frac{1}{2}$

2. 配方法

例1: (1) $y=x^2-3x+2$ $(x\in[0,4])$ (2) $y=x+2\sqrt{x}+3$

解: $y\in[-\frac{1}{4},6)$ 解: $y\in[3,+\infty)$

(3) $y=\frac{1}{x^2+x+1}$

解: $y\in(0,\frac{4}{3}]$

(4) $f(x)=2+\log_3 x$, $x\in[1,9]$. 求 $y=f^2(x)+f(x^2)$ 值域

解: $y=(2+\log_3 x)^2+2+2\log_3 x$

$=\log_3 x^2+6\log_3 x+6$

$=2(\log_3 x^2+2\log_3 x+3)$

$=2[(\log_3 x+1)^2+2]$

$\because 1\leq x\leq 9$ $\therefore 1\leq x^2\leq 9$ $\therefore 1\leq x\leq 3$

$\therefore 0\leq\log_3 x\leq 1$

$\therefore y\in[6,13]$

(5) $f(x)=-4x^2+4ax-4a-a^2$ 在 $x\in[0,1]$ 有最大值 -5, 求 a 值

解: $f(x)=-(4x^2-4ax+4a)-a^2$

$=-4(x^2-ax+a)-a^2$

$=-4(x^2-ax+\frac{a^2}{4}+a-\frac{a^2}{4})-a^2$

$= -4(x-\frac{a}{2})^2-4a+a^2-a^2$

$= -4(x-\frac{a}{2})^2-4a=-4[(x-\frac{a}{2})^2+a]=-4x^2+4ax-(a^2+4a)$

$\therefore$ 对称轴为 $x=\frac{a}{2}$

①当 $\frac{a}{2}>1$ 时，即 $a>2$ 时，

$f(x)_{min}=f(1)=-4[(1-\frac{a}{2})^2+a]=-5$

$\therefore\ a=\pm1$（舍）

②当 $0\le\frac{a}{2}\le1$ 时，

$f(x)_{min}=f(\frac{a}{2})=-4a=-5\quad\therefore a=\frac{5}{4}$

③当 $\frac{a}{2}<0$ 时

$-4a^2-a^2=-5$

$\therefore\ a=-5$

$\therefore\ a=-\frac{5}{4}$ 或 $a=-5$

3. 利用单调性.

例3: (1) $y=2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\ \uparrow$

解: $x\in[0,1]$

$\therefore y\in[-1,2]$

(2) $y=x+\sqrt{x-1}$

解: $x\in[-1,+\infty)$

$\therefore y\in[1,+\infty)$

(3) $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

解: $y=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$x\in[1,+\infty)$

$\therefore y\in[0,1]$

增+增=增

减+减=减

增-减=增

(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-1}$ ↑

解：$x\in[2,+\infty)$

$\therefore y\in[1,+\infty)$

4. 换元法（注意新元的范围）

(1) 代数换元

例4. (1) $y=2x-\sqrt{x-3}$

解：设 $t=\sqrt{x-3}$，$t\in[0,+\infty)$

$\therefore x=t^2+3$

$\therefore y=2t^2+6-t$，$t\in[0,+\infty)$

$\therefore y\in[\frac{47}{8},+\infty)$

(2) $y=2x-1+\sqrt{1-3x}$

解：设 $t=\sqrt{1-3x}$　　$t\in[0,+\infty)$

$\therefore t^2=1-3x$　　$\therefore x=\frac{1-t^2}{3}$

$\therefore y=\frac{2-2t^2}{3}-1+t$

$=-\frac{2}{3}t^2+t-\frac{1}{3}$

$\therefore y\in(-\infty,\frac{1}{24}]$

(3) $f(x)$ 值域为 $[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$ 求 $g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 值域

解：设 $f(x)=u$，$\sqrt{1-2u}=t$，$t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

$t^2=1-2u$.　　$\therefore u=\frac{1-t^2}{2}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}-\frac{t^2}{2}+t$

$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$

$\therefore g(x)\in[\frac{7}{9},\frac{7}{8}]$

(2) 三角换元.

例5：(1) $y=x+\sqrt{1-x^2}$

解：$-1 \le x \le 1$

设 $x=\sin t$，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$y=\sin t+\sqrt{1-\sin^2 t}=\sin t+|\cos t|$

$\therefore y=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$

$t+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

$\sin(t+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

$\therefore y\in[-1,\sqrt{2}]$

(2) $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

解：$0\le x\le 1$

设 $x=\sin^2 t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\therefore y=|\sin t|+|\cos t|=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$

$t+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

$\therefore \sin(t+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

$\therefore y\in[1,\sqrt{2}]$

5. 分离常数

例6：(1) $y=\frac{2x-1}{x+1}$

解：$y=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$

$\because \frac{3}{x+1}\ne 0$

$\therefore y\ne 2$

当 $y=\frac{ax+1}{cx+d}$（x无限制时）：$y\ne\frac{a}{c}$

(2) $y=\frac{2x-1}{x+1}$　　$x\in(0,1)$

解：$y=2-\frac{3}{x+1}$

$x+1\in(1,2)$

$\therefore \frac{3}{x+1}\in(\frac{3}{2},3)$

$\therefore -\frac{3}{x+1} \in (-3, -\frac{3}{2})$

$\therefore y \in (-1, \frac{1}{2})$

6. 反表示法 自变量有取值范围

例7: $y=\frac{2x-1}{x+1}$ $x\in(-2,1)$

$yx+y=2x-1$, $\Rightarrow (y-2)x=-1-y$

① 当 $y=2$ 时，不成立

② 当 $y\neq 2$ 时，

$x=\frac{-1-y}{y-2} \in (-2,1)$

$\therefore y \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (5, +\infty)$

7. 判别式法

$y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

例8: (1) $y=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}$

解: $yx^2+yx+y=2x^2+2x+5$

$(y-2)x^2+(y-2)x+(y-5)=0$

① 当 $y=2$ 时，$-3=0$，不成立

② 当 $y\neq 2$ 时

$\Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-5)\geq 0$

$\therefore y\in\left[\frac{9-\sqrt{33}}{2}, \frac{9+\sqrt{33}}{2}\right]$

(2) $y=\frac{x+2}{x^2+3x+6}$

解: $yx^2+3yx+6-x-2=0$

$\therefore yx^2+(3y-1)x+4=0$

① 当 $y=0$ 时，$-x+4=0$，$\therefore x=4$，成立

② 当 $y\neq 0$ 时，

$\Delta=(3y-1)^2-16y\geq 0$

$\therefore -\frac{1}{5} \le y \le \frac{1}{3}$

8. 数形结合

例9: (1) $y = |x+5| + |x-3|$ $y \geq 8$

(2) $y = \frac{2-\sin x}{3+\cos x}$

斜率: $(3,2)$ $(-\cos x, \sin x)$

9. 构造法:

例10: 求 $y = \sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10}$ 最小值

解: $y = \sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}$

y 表示 $M(x,0)$ 与 $A(1,2)$ 和 $B(-1,3)$ 距离之和

$\therefore y_{min} = \sqrt{29}$

10. 利用导数对函数求导列表, 求最值.

二. 函数值域. 最值的逆向问题

例1: (1) $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ $(a>0)$ 值域为 $[-1, 4]$, 求 a. b 值

解: $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$

$\therefore yx^2 + y - ax - b = 0$

$yx^2 - ax + (y-b) = 0$

① $y=0$ 时, x 有解 $\therefore$ 符合

② $y \neq 0$ 时

$\Delta = a^2 - 4y(y-b) \geq 0$

$\therefore -4y^2 + 4by + a^2 \geq 0$

$y^2 - by - \frac{a^2}{4} \leq 0$

$\therefore \begin{cases} 1+b-\frac{a^2}{4}=0 \\ 16-4b-\frac{a^2}{4}=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$

(2) $f(x)=\log_3 \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 定义域为R，值域为 $[0,2]$，求m,n值

解：$y=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1} \in [1,9]$

$\therefore yx^2+y-mx^2-8x-n=0$

$(y-m)x^2-8x+(y-n)=0$

①当 $y=m$ 时：$-8x+m-n=0$

②当 $y\neq m$ 时：

$\Delta=64-4(y-m)(y-n)\geq 0$

$\therefore 64-4[y^2-(m+n)y+mn]\geq 0$

$\therefore -4y^2+4(m+n)y+(64-4mn)\geq 0$

$\therefore \begin{cases} m+n=10 \\ mn-16=9 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m=5 \\ n=5 \end{cases}$

例2. $f(x)=x^2+4ax+2a+b$

(1) 若 $f(x)$ 值域为 $[0,+\infty)$，求a值.

(2) 若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 $f(a)=2-a|a+3|$ 值域

解：(1) $\Delta=16a^2-4(2a+6)=0$

$\therefore a=-1$ 或 $\frac{3}{2}$

(2) $\Delta=16a^2-4(2a+6)\leq 0$

$\therefore f(a)\in[-\frac{19}{4},4]$

函数单调性

一. 定义

一般的，设函数$f(x)$定义域为x，如果对于定义域之内某个区间d上，任意两个自变量x_1、x_2

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，称$f(x)$在区间d上是增函数

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，称$f(x)$在区间d上是减函数

区间d为单调函数

注：① 单调性是函数的局部性质

② x_1、x_2具有任意性，不能用特殊值代替。

③ $f(x)$在$[a,b]$上单调递增 $\Leftrightarrow (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geq 0$

④ a. $f(x)$为单调递增↑ $g(x)$单调递增↑，则 $f(x)+g(x)$ ↑

b. $f(x)$↑，$g(x)$↑，$f(x)>0$，$g(x)>0$，则$f(x)\cdot g(x)$↑

⑤ 偶函数在对称区间单调性相反，奇函数在对称区间单调性相同

二、判断函数单调性的方法

1. 定义

2. 求导

注：抽象函数用定义判断单调性

注意：$x_2=x_1+x_2-x_1$

$$x_2=\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1$$

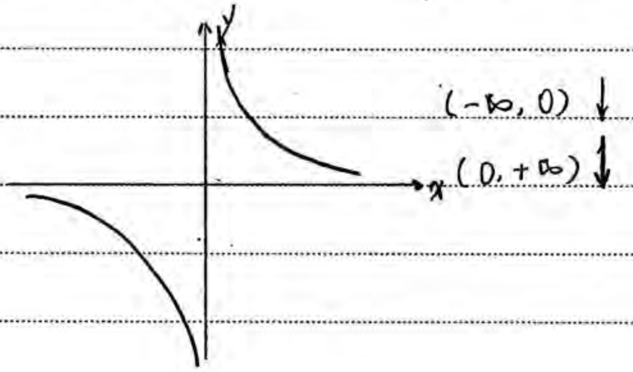
三、复合函数单调性

(外)	$y=f(u)$	↑	↑	↓	↓	同增异减
(内)	$u=g(x)$	↑	↓	↑	↓	(只应用于小题)
(复合)	$y=f[g(x)]$	↑	↓	↓	↑	

四、常见函数单调性

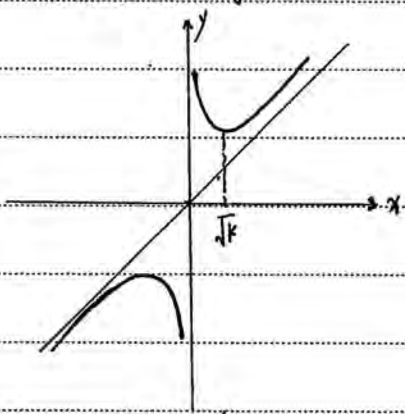
1. 分式型

① $y=\frac{1}{x}$

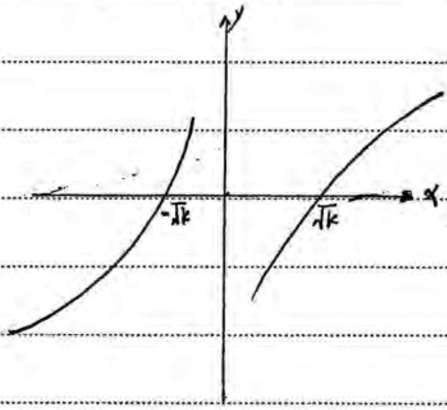


② $y=x+\frac{k}{x}$

a. $k>0$时.



b: $k<0$时



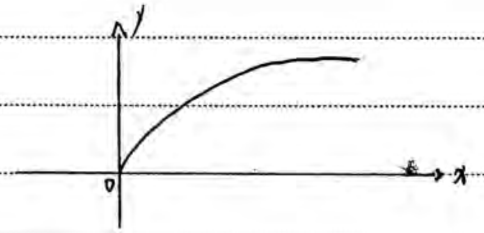
③ $y=\frac{cx+d}{ax+b}$

分离常数转化为①型

2. 无理型

① $y=\sqrt{x}$

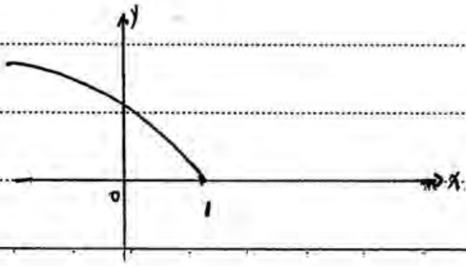
$x\geq 0$



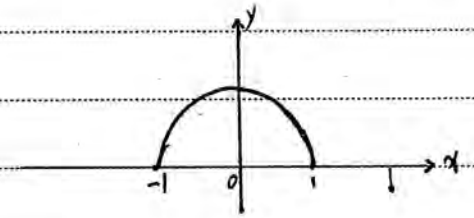
② $y=\sqrt{1-x}$

$x\leq 1$

(即$y=\sqrt{-x}$向右平移1个单位)



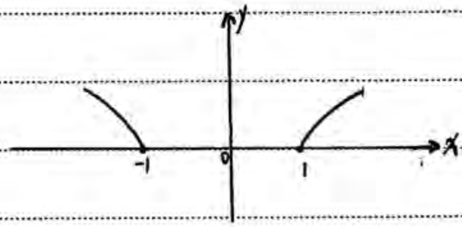
③ $y=\sqrt{1-x^2}$



④ $y=\sqrt{x^2-1}$

$x^2-y^2=1$

双曲线上半部分



五：基本题型

题型一：求单调区间

例1：$y=\sqrt{x^2-6x+5}$

解：$x^2-6x+5\geq 0 \Rightarrow x\leq 1$ 或 $x\geq 5$

设 $y=\sqrt{u}\uparrow$，$u=x^2-6x+5$

∴ 增区间：$[5,+\infty)$，减区间 $(-\infty,1]$

(2) $y=\frac{1}{x^2-6x+5}$

解：$x^2-6x+5\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ 且 $x\neq 5$

设 $y=\frac{1}{u}\downarrow$，$u=x^2-6x+5$

减区间：$(3,5)\cup(5,+\infty)$

增区间：$(-\infty,1)\cup(1,3)$

(3) $y=3^{x^2-6x+5}$

解：设 $y=3^u\uparrow$，$u=x^2-6x+5$

增区间：$(3,+\infty)$

减区间：$(-\infty,3)$

(4) $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$

解：设 $y=\log_{\frac{1}{2}} u$，$u=4x-x^2$ 定义域 $0<x<4$

增区间：$(2,4)$

减区间：$(0,2)$

(5) $y=(x-3)\cdot e^x$

解：$y'=(x-3)'\cdot e^x+(x-3)\cdot(e^x)'=e^x+(x-3)\cdot e^x=e^x(x-2)$

$y'=0 \Rightarrow 2$

$y'>0 \Rightarrow (2,+\infty)\uparrow$

$y'<0 \Rightarrow (-\infty,2)\downarrow$

(6) $y=(x-1)^2-2|x-1|+2$

解：$y=x^2-2x-2|x-1|+3$

① $x\geq 1$ 时，$y=x^2-2x-2(x-1)+3=x^2-4x+5$

增区间 $(2,+\infty)$，减区间 $(1,2)$

② $x<$ 时，$y=x^2+1$

减区间：$(-\infty,0)$，增区间：$(0,1)$

∴ 综上：增区间为 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,2)$

题型二：证明单调性：

例2：(1) 求证：$y=4\sqrt{x}-x$ 在 $[0,4]$ 单调递增

① 证：在 $[0,4]$ 上任取 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$

$$y_1-y_2=4\sqrt{x_1}-x_1-(4\sqrt{x_2}-x_2)$$

$$=4(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})-(x_1-x_2)$$

$$=\left[4-(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\right](\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})$$

∵ $0\leq x_1\leq 4$，$0\leq x_2\leq 4$

∴ $0\leq\sqrt{x_1}\leq 2$，$0\leq\sqrt{x_2}\leq 2$

又 $\because x_1 < x_2$， $\therefore 0 < \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} < 4$ ， $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} < 0$

$\therefore 4-(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}) > 0$

$\therefore y_1 - y_2 < 0$ $\therefore y_1 < y_2$

$\therefore y = 4\sqrt{x} - x$ 在 $x \in [0,4]$ 上单调递增

② 证： $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$

$\because x \in [0,4]$ $\therefore \sqrt{x} \in [0,2]$

$\therefore \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 1$. $\sqrt{x} \in (0,2]$

$\therefore y' \geq 0$ 且不恒为0，$y = 4\sqrt{x} - x$ 在 $[0,4]$ 上单调递增

(2) 任意 $a, b \in R$，$f(a+b) = f(a)+f(b)$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

证：任取 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，且 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x_1)-f(x_2) &= f(x_1)-f[(x_2-x_1)+x_1] \\ &= f(x_1) - [f(x_2-x_1)+f(x_1)] \\ &= -f(x_2-x_1)\end{aligned}$$

$\because x_2 - x_1 > 0$， $\therefore f(x_2-x_1) < 0$ $\therefore -f(x_2-x_1) > 0$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减。

(3) $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，任意正整数 a, b，有 $f(a \cdot b) = f(a)+f(b)$ 当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x)>0$，求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

解：任取 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2) &= f(x_1) - f(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1) \\ &= f(x_1) - [f(\frac{x_2}{x_1}) + f(x_1)] \\ &= -f(\frac{x_2}{x_1})\end{aligned}$$

$\because \frac{x_2}{x_1} > 0$ $\therefore f(\frac{x_2}{x_1}) > 0$ $\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

题型三：单调性应用

1. 求最值

例：求 $y = 3 - \sqrt{2-2x+x^2}$ 最值

解：$2-2x+x^2$ 恒大于0，$x \in R$

$y_{max} = 3-1=2$，无最小值

2. 比较大小

例：$f(x)$ 在 R 上是偶函数，在 $[0,+\infty)\downarrow$，比较 $f(-\frac{3}{4})$ 与 $f(a^2-a+1)$ 的大小。

解：$f(x) \begin{cases} [0,+\infty)\downarrow \\ (-\infty,0)\uparrow \end{cases}$

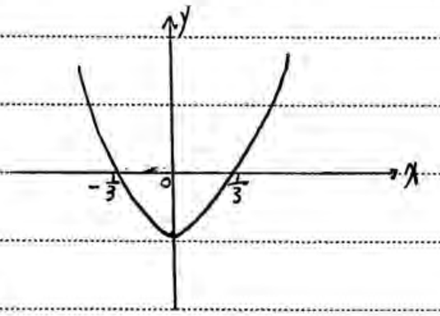
$a^2-a+1 = (a-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$\therefore f(a^2-a+1) \leq f(\frac{3}{4}) = f(-\frac{3}{4})$

3. 解不等式

例1. $f(x)$ 在 R 上为偶函数，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow$，$f(\frac{1}{3})=0$，解 $f(\log_{\frac{1}{8}} x) > 0$.

解：$f(x) \begin{cases} (0,+\infty)\uparrow \\ (-\infty,0)\downarrow \end{cases}$



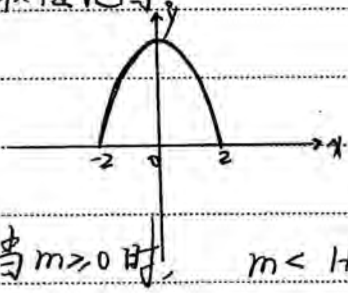
$\begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{8}} x > \frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>0 \\ \log_{\frac{1}{8}} x < -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\therefore 0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$

2. 定义域在 $[-2,2]$ 上偶函数 $f(x)$ 在 $[0,2]\downarrow$，若 $f(1+m)<f(m)$

求 m 取值范围

解：



$\begin{cases} -2\le 1+m\le 2 \\ -2\le m\le 2 \end{cases} \Rightarrow -2\le m\le 1$

(1) 当 $m\geqslant 0$ 时，$m<1+m$

$f(1+m)<f(m)$ $\therefore m\geqslant 0$ 成立. $\therefore 0\le m\le 1$

(2) 当 $m<-1$ 时，$1+m<0$

$f(1+m)>f(m)$ $\therefore m<-1$ 不成立

(3) 当 $\begin{cases} m<0 \\ 1+m>0 \end{cases}$ 即 $-1<m<0$ 时.

$f(m)=f(-m)$ $-m>0$

$\therefore -m<1+m$ $\therefore m>-\frac{1}{2}$. 即 $-\frac{1}{2}<m<0$

$\therefore$ 综上：$m\in(-\frac{1}{2},1]$

函数的奇偶性

一. 定义：

设函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$，对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数；对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数

注：首先判断定义域是否关于原点对称，若不对称，则函数为非奇非偶函数

二. 性质

1. 图象：

奇：关于原点对称

偶：关于y轴对称

2. 奇：在对称区间上单调性相同

偶：在对称区间上单调性相反

3. 奇函数 $f(x)$ 若在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$

4. 函数的等价形式

奇：$f(x)=-f(-x) \Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=-1$，$f(x)\neq 0$

偶：$f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=1$，$f(x)\neq 0$

5. 存在 x_0 使得 $f(-x_0)\neq -f(x_0)$，则 $f(x)$ 不是奇函数

存在 x_0 使得 $f(-x_0)\neq f(x_0)$，则 $f(x)$ 不是偶函数

6. $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

（奇函数）（偶函数）

一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和

7. ① 奇 ± 奇 = 奇

② 偶 ± 偶 = 偶

③ 奇 ± 奇 = 偶

④ 偶 ± 偶 = 偶

⑤ 奇 ± 偶 = 奇

8. 复合函数的奇偶性

内：$u=f(x)$	奇	奇	偶	偶
外：$g(u)$	奇	偶	奇	偶
复合：$g[f(x)]$	奇	偶	偶	偶

一偶必偶

例1：判断下列函数奇偶性

(1) $f(x)=\lg(4+x)+\lg(4-x)$

解：$\begin{cases}4+x>0\\4-x>0\end{cases}\Rightarrow -4<x<4$

$f(-x)=\lg(4-x)+\lg(4+x)=f(x)$

∴ 偶函数

(2) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解：$x\in R$

$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$

$f(-x)+f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{x^2+1})=\lg 1=0$

∴ 奇函数

(3) $f(x)=x\cdot\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$

解：$2^x-1\neq 0$ ∴ $x\neq 0$

$g(x)=x$ 为奇函数

$u(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}$

$u(-x)=\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}$

$u(x)+u(-x)=0$ ∴ $u(x)$ 为奇函数

∴ $f(x)$ 为偶函数

(4) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x>0)\\ x^2+2x-1 & (x<0)\end{cases}$

解：奇函数（①图像 ②定义）

(5) $f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$

解：$1+\sin x+\cos x\neq 0$ ∴ $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq -1$ ∴ $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 或 $2k\pi+\pi$

定义域关于原点不对称

∴ 非奇非偶

1. 多项式型

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

偶函数：奇次项系数为0

奇函数：偶次项系数为0，常数项为0

2. 指对型

(1) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 奇函数

(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$

定义域：$x\geq 1$ ∴ 非奇非偶

(3) $f(x)=a^x+a^{-x}$ 偶函数

(4) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 奇函数

3. 无关型

(1) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2-|x-2|}$

定义域：$-1\leq x\leq 1$ 且 $x\neq 0$

∴ $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

∴ 奇函数

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

定义域 $x\in R$

$$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{\sqrt{x^2+1}-(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x+1}{\sqrt{x^2+1}+x-1}=\frac{(x^2+1)-(x+1)^2}{(x^2+1)-(x-1)^2}$$

$$=\frac{-2x}{2x}=-1$$

∴ 奇函数

4. 绝对值型

(1) $f(x)=|ax+b|-|ax-b|$ 奇函数

(2) $f(x)=|ax+b|+|ax-b|$ 偶函数

5. 三角型

(1) $f(x)=A\sin(wx+\varphi)$ 为奇函数

$\Rightarrow \varphi=k\pi \quad (k\in Z)$

(2) $f(x)=A\sin(wx+\varphi)$ 为偶函数

$\Rightarrow \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$. $(k \in Z)$

(3) $f(x) = A\cos(wx+\varphi)$ 为奇函数

$\Rightarrow \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

(4) $f(x) = A\cos(wx+\varphi)$ 为偶函数

$\Rightarrow \varphi = k\pi$

(5) $f(x) = A\tan(wx+\varphi)$ 为奇函数

$\Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2}$

6. 隐函数型： $(x, y \in R$, $f(x)$ 不恒为 $0)$

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$，则 $f(x)$ 为奇函数

$f(0) = 0$ 用 $-x$ 代替 y $\therefore f(0) = f(x) + f(-x)$

$\therefore f(x) = -f(-x)$

(2) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ 则 $f(x)$ 为偶函数

令 $y=0$ $\therefore f(x) + f(x) = 2f(x) \cdot f(0)$ $\therefore f(0) = 1$

令 $x=0$. $\therefore f(y) + f(-y) = 2f(0) \cdot f(y) = 2f(y)$ $\therefore f(-y) = f(y)$

(3) $f(x) + f(y) = 2f(\frac{x+y}{2}) \cdot f(\frac{x-y}{2})$

令 $x=y$ $\therefore 2f(x) = 2f(x) \cdot f(0)$ $\therefore f(0) = 1$

令 $x=-y$ $\therefore f(-y) + f(y) = 2f(0) \cdot f(-y) = 2f(-y)$

$\therefore f(y) = f(-y)$ $\therefore$ 偶函数

(4) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

令：$x=y=0$ $\therefore f(0) = 2f(0)$ $\therefore f(0) = 0$

令 $y=-1$, $\therefore f(-x) = f(x) + f(-1)$

令 $x=y=1$. $\therefore f(1) = 0$

令 $x=y=-1$. $\therefore f(1) = 2f(-1) = 0$. $\therefore f(-1) = 0$

令 $y=-1$，∴ $f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x)$ ∴偶函数

四. $f(x)$ $\begin{cases} ①\text{奇函数} \\ ②\text{偶函数} \\ ③\text{非奇非偶} \\ ④\text{既奇既偶}: y=0 \end{cases}$

函数的对称性与周期性

一. 函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称 <=>　　一般结论：

$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x)=f(2a-x) \\ f(2a+x)=f(-x) \\ f(x+a)\text{为偶函数} \end{cases}$

$y=f(2+x)$ 与 $y=f(2-x)$ 关于 y 轴对称

$y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 图象关于 $x=\frac{b+a}{2}$ 对称

（令 $a+x=b-x$ => $x=\frac{a+b}{2}$）

引申：$f(x+a)=f(b-x)$ <=> 对称轴为 $x=\frac{a+b}{2}$

△：$y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 (a,b) 中心对称，求 $g(x)$

设 $g(x)$ 上一点为 (x,y)，关于 (a,b) 对称点为 $(2a-x,2b-y)$

∴ $f(2a-x)=2b-y$　∴ $y=2b-f(2a-x)$　∴ $g(x)=2b-f(2a-x)$

令 $a=b=0$，$g(x)=-f(-x)$

二. 函数 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 对称 <=>

$\begin{cases} f(2a-x)=-f(x) \\ \quad\downarrow \text{用 } x+a \text{ 替换 } x \\ f(a-x)=-f(x+a) \\ f(2a+x)=-f(-x) \\ f(x+a)\text{是奇函数} \end{cases}$

引申：$f(x)$ 关于 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$

二. 周期性

1. 周期定义：对于定义域中任意 x 都存在非零常数，使 $f(x+T)=f(x)$ 则 T 是 $f(x)$ 的一个周期；若 T 是 $f(x)$ 的正周期且不存在比 T 更小的正数，则 T 是 $f(x)$ 的最小正周期

2. 性质

(1) 若 $f(x+a)=f(x)$，则 $T=|a|$

(2) 若 $f(x+a)=-f(x)$，则 $T=2|a|$

(3) 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$，则 $T=2|a|$

证：$f(x+a+a)=\frac{1}{f(x+a)}=f(x)$

(4) 若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$，则 $T=2|a|$

证：$f(x+a+a)=-\frac{1}{f(x+a)}=f(x)$

(5) 若 $f(a+x)=f(b+x)$，则 $T=|b-a|$

证：用 $x-a$ 替换 x

$f(x)=f(b-a+x)$

(6) 若 $f(x)$ 的两条对称轴为 $x=a$ 和 $x=b$，则 $T=2|b-a|$（不一定最小正周期）

证：$\begin{cases} f(x)=f(2a-x) \\ f(x)=f(2b-x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x) \Rightarrow T=2|b-a|$

(7) 若 $f(x)$ 的两个对称中心为 $(a,0)$ 和 $(b,0)$，则 $T=2|b-a|$（不一定是最小正周期）

证：$\begin{cases} f(x)=-f(2a-x) \\ f(x)=-f(2b-x) \end{cases}$

$\Rightarrow f(2a-x) = -f(2b-x) \Rightarrow f(2a+x) = -f(2b+x)$

$\Rightarrow f(x) = -f(2b-2a+x)$

$\therefore T = 4|b-a|$

(9) 若 $f(x+2a) = f(x+a) - f(x)$ ，则 $T = 6|a|$

证：$f(x+3a) = f(x+2a) - f(x+a)$

$\therefore f(x+3a) = f(x+a) - f(x) - f(x+a) = -f(x)$

$\therefore T = 6a$

(10) 若 $f(x)$ 是偶函数且 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称，则 $T=4|a|$.（不一定是最小正周期）

证：$f(x+a) = f(x-a)$

用 $x-a$ 替换 x

$f(x) = f(x-2a)$

(12) 若 $f(x)$ 是偶函数且对称中心为 $(a,0)$ ，则 $T = 4|a|$

(13) 若 $f(x)$ 是奇函数且对称中心为 $(a,0)$ ，则 $T = 2|a|$

练习:

1. 定义在R上的奇函数 $f(x)$ 是且 $y=f(x)$ 图象关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，则

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2010)=0$

解：$f(0)=0$

$T=1$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(2010)$

$= 2010f(1) = 2010f(0) = 0$

2. $f(x)$ 是周期为2的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\lg x$ ，比较 $f(\frac{6}{5})$

$f(\frac{3}{2})$、$f(\frac{5}{2})$ 大小

解：$f(\frac{6}{5})=f(\frac{6}{5}-0)=-f(\frac{4}{5})=-\lg\frac{4}{5}>0$

$f(\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2}-2)=-f(\frac{7}{2})=-\lg\frac{1}{2}>0$

$f(\frac{5}{2})=f(\frac{3}{2}-2)=-f(-\frac{1}{2})=\lg\frac{1}{2}<0$

∴

3. $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，$f(1)=-5$，则 $f[f(5)]$ 。$T=4$

解：$f(x+2)=\frac{1}{f(x)} \Rightarrow f(5)=\frac{1}{f(3)}=f(1)=-5$

$f(-5)=f(-1)=f(3)=-\frac{1}{5}$

4. 定义在R上的奇函数 $f(x)$，$f(x+2)=-f(x)$，若 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=x$

则 $f(7.5)=0$

解：

指 数 函 数

一、指数

1. 根式的运算性质

(1) n 为正整数 $(\sqrt[n]{a})^n=a$

(2) $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & (n为奇数) \\ |a| & (n为偶数) \end{cases}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

2. 有理指数幂的运算性质

(1) $a^0=1$　　$(a\ne 0)$

(2) $a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$ $(a\neq 0)$

(3) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

(4) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$

(5) $(a^{m})^{n}=a^{mn}$

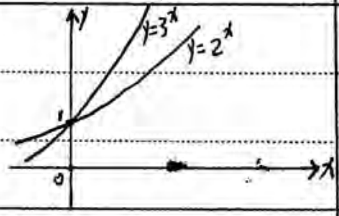
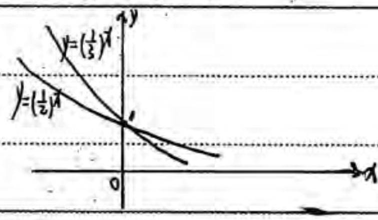
(6) $(a\cdot b)^{m}=a^{m}b^{m}$

二、指数函数

1、定义：

形如 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$ 且 a 为常数）的函数叫做指数函数

2、图象性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
	定义域 $(-\infty,+\infty)$	定义域 $(-\infty,+\infty)$
性质	值域 $(0,+\infty)$	值域 $(0,+\infty)$
	恒过 $(0,1)$	恒过 $(0,1)$
	单调递增	单调递减
	a 越大，图象越靠近 y 轴	a 越小，图象越靠近 y 轴

二、指数方程的解法

1、形如 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$

2、$a^{2x}+ka^{x}+p=0$

设 $t=a^{x}$，转化为一元二次方程

对数与对数函数

一、对数

1. 定义

若 $a^b=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$），则 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$

2. 指对互化

$a^b=N \Leftrightarrow b=\log_a N$

3. 对数运算性质

(1) $a^{\log_a N}=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$）—— 对数恒等式

(2) $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$ —— 换底公式

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

$\log_{\frac{1}{a}} b=-\log_a b$　　$\log_a a^N=N$　　$\log_{a^m} b^m=\log_a b$

(4) $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$　（$\lg2+\lg5=1$）

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

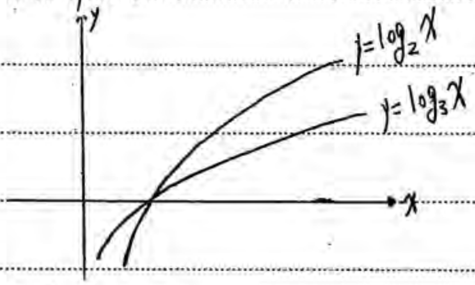
二、对数函数

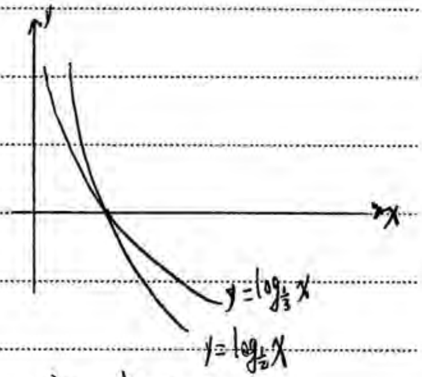
1. 定义

$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$ 且 a 为常数）叫做对数函数

2. 图象与性质

图象





性质

定义域：$(0,+\infty)$

值域：$(-\infty,+\infty)$

恒过：$(1,0)$

单调递增

$x\in(1,+\infty)$，底数 a 越大图象越靠近 x 轴

定义域 $(0,+\infty)$

值域 $(-\infty,+\infty)$

恒过 $(1,0)$

$x\in(0,1)$，a 越小，图象越靠近 x 轴

底数互为倒数的两个对数函数，图象关于 y 轴对称

例1. 比较大小

(1) 0.4^3，$3^{0.4}$，$\log_4 0.3$

$\therefore \log_4 0.3 < 0.4^3 < 3^{0.4}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$，$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$，$(\frac{1}{2})^{0.3}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > (\frac{1}{2})^{0.3} > \log_{\frac{1}{3}} 2$

(3) $\log_3 \pi$，$\log_7 6$，$\log_2 0.8$

$\therefore \log_2 0.8 < \log_7 6 < \log_3 \pi$

(4) 已知 $a>1$，$x=\log_a(a^2+1)$，$y=\log_a(a-1)$，$z=\log_a 2a$

解：$a^2+1-2a=(a-1)^2>0$，$\therefore a^2+1>2a$

$\because a-1-2a=-1-a$，$\because a>1$，$\therefore -a<-1$，$\therefore -1-a<-2$

$\therefore a-1<2a \quad \therefore a^2+1>2a>a-1$

$\therefore \log_a(a^2+1)>\log_a 2a>\log_a(a-1)$

$\therefore x>z>y$

(5) 已知 $0<a<1$，$x=\log_a\sqrt{2}+\log_a\sqrt{3}$，$y=\frac{1}{2}\log_a\sqrt{3}$，$z=\log_a\sqrt{21}-\log_a\sqrt{3}$

解: $x=\log_a\sqrt{6}$，$y=\log_a\sqrt{5}$. $z=\log_a\sqrt{3}$

$\because 0<a<1$

$\therefore z<x<y$

(6) $x\in(-\infty,1)$，$a=\ln x$，$b=2\ln x$，$c=(\ln x)^2$

解: $a=\ln x$ $b=\ln x^2$，$\because x\in(0,1)$ $\therefore x^2<x$

$\therefore b<a<0$. 又 $\because \ln x<0$. $\therefore (\ln x)^2>0$. $\therefore c>0$

(7) 2^{ab}，$\log_x 3$，$\log_2 \sin\frac{2}{5}\pi$

<1> <3>

(8) $x\in(0,1)$ 2^x，$x^{\frac{1}{2}}$，$\ln x$

$2^x>x^{\frac{1}{2}}>\ln x$

(9) $a.b.c>0$. $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$. $(\frac{1}{2})^b=\log_{\frac{1}{2}}b$. $(\frac{1}{2})^c=\log_2 c$

比较 a,b,c . $c>b>a$. 图象

幂函数

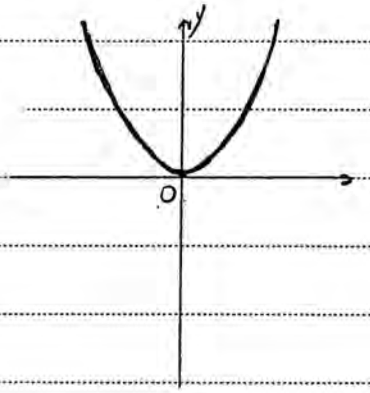
一、定义

函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是变量，α 是常数。（α 为任意实数）

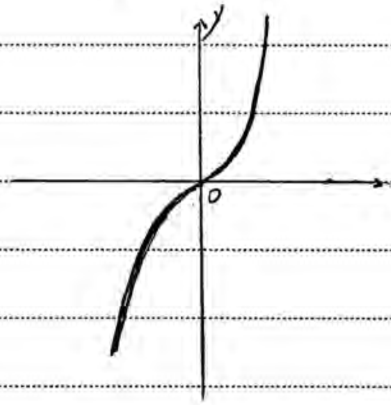
二、常见幂函数的图象

1. $\alpha>1$ 时

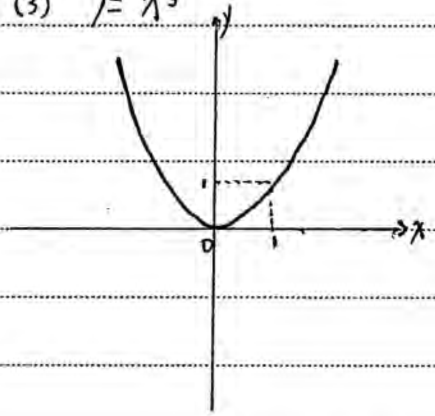
(1) $y=x^2$



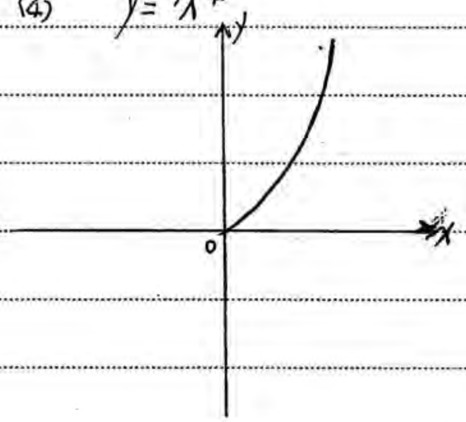
(2) $y=x^3$



(3) $y=x^{\frac{4}{3}}$



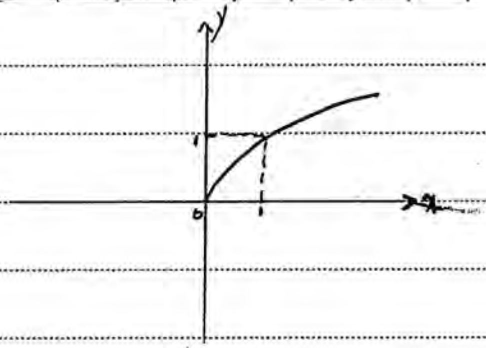
(4) $y=x^{\frac{5}{4}}$

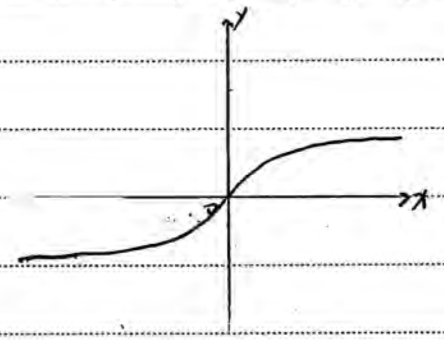


2. $0<\alpha<1$ 时

(1) $y=x^{\frac{1}{2}}$

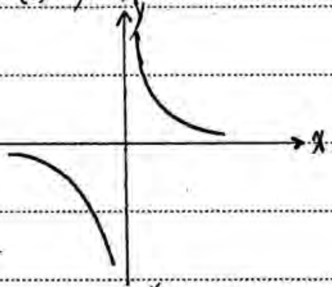
(2) $y=x^{\frac{1}{3}}$



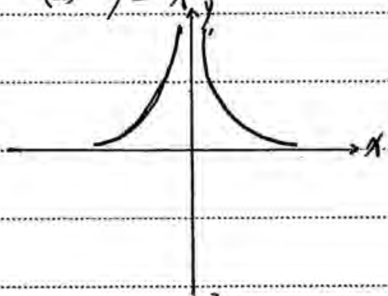


(3) $\alpha<0$ 时.

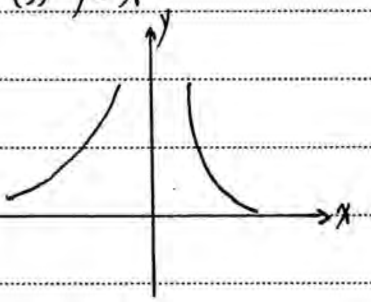
(1) $y=x^{-1}$



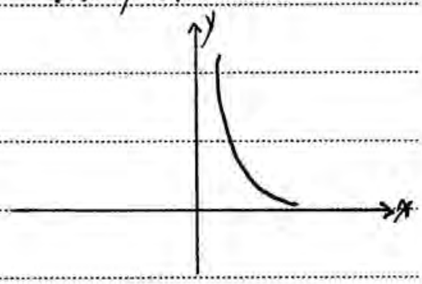
(2) $y=x^{-2}$



(3) $y=x^{-\frac{4}{3}}$



(4) $y=x^{-\frac{3}{4}}$



三. 幂函数性质

1. 幂函数，图象恒过$(1,1)$

   $\alpha>0$ 时，还过原点

2. 在第一象限，$\alpha>1$，图象向下凹，$0<\alpha<1$，图象向上凸；$\alpha<0$ 图象单调减

3. 在$x\in(0,1)$上，指数越大，图象越靠近x轴

四、幂比较大小

1、两个幂的底数相同，利用指数函数单调性比较大小、

2、两个幂的指数相同，利用幂函数单调性比较大小、

3、两个幂底数和指数均不同，找一个中间量使之与一个幂底相同，与另一个幂指数相同，分别比较、

例1、比较大小、

(1) $3^{0.8} > 3^{0.7}$

(2) $0.21^3 < 0.23^3$

(3) $4.1^{\frac{2}{5}}$、$3.8^{-\frac{2}{5}}$、$(-1.4)^{\frac{3}{5}}$

$4.1^{\frac{2}{5}} > 3.8^{-\frac{2}{5}} > (-1.4)^{\frac{3}{5}}$

2、$f(x)=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}$，m为何值时，$f(x)$为

(1) 正比例函数 (2) 反比例函数 (3) 二次函数 (4) 幂函数

解：(1) $\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=1 \end{cases} \Rightarrow m=1$

(2) $\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=-1 \end{cases} \Rightarrow m=0$或$-1$

(3) $\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=2 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$或$m=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

(4) $m^2+2m=1 \Rightarrow m=-1+\sqrt{2}$或$-1-\sqrt{2}$

函数的图象

一、四种图像变换

1、平移

(1) 水平平移

$y=f(x) \xrightarrow{\text{向左平移}a\text{个单位}} y=f(x+a)$，$a>0$

$y=f(x) \xrightarrow{\text{向右平移}a\text{个单位}} y=f(x-a)$． $a>0$

(2) 竖直平移

$y=f(x) \xrightarrow{\text{向上平移}b\text{个单位}} y=f(x)+b$ $b>0$

$y=f(x) \xrightarrow{\text{向下平移}b\text{个单位}} y=f(x)-b$ $b>0$

2、对称

(1) $y=f(x) \xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}} y=f(-x)$

(2) $y=f(x) \xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}} y=-f(x)$

(3) $y=f(x) \xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x)$

3、翻折

(1) $y=f(x) \longrightarrow y=f(|x|)$

做出y轴右侧图象，以y轴为对称轴，做出y轴左侧图象

(2) $y=f(x) \longrightarrow y=|f(x)|$

做出$y=f(x)$图象，将x轴下方部分以x轴为对称轴翻折上方

4、伸缩变换 $(a>0)$

(1) $y=f(x) \xrightarrow{\text{横坐标变为原来}\frac{1}{a}} y=f(ax)$

(2) $y=f(x) \xrightarrow{\text{纵坐标变为原来}a\text{倍}} y=af(x)$

画函数，草图经常借助以下性质

(1) 定义域

(2) 奇偶性

(3) 对称性, 周期性

(4) 切线斜率, 导数的几何意义

(5) 特殊函数值 (计算 $f(x_0)$)

二次函数

一. 二次函数解析式

1. 一般式: $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$
2. 顶点式: $f(x)=a(x-m)^2+n \quad (a\neq 0)$
3. 零点式: $f(x)=a(x-m)(x-n) \quad (a\neq 0)$

二. 二次函数在区间上的最值

设 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ 在 $x\in[m,n]$ 上最值

(1) $a>0$ 时,

① $-\frac{b}{2a}<m$ 时, $f(x)_{max}=f(n)$, $f(x)_{min}=f(m)$

② $m\leq -\frac{b}{2a}<\frac{m+n}{2}$: $f(x)_{max}=f(n)$. $f(x)_{min}=f(-\frac{b}{2a})$

③ $\frac{m+n}{2}\leq -\frac{b}{2a}<n$, $f(x)_{max}=f(m)$, $f(x)_{min}=f(-\frac{b}{2a})$

④ $-\frac{b}{2a}\geq n$: $f(x)_{max}=f(m)$. $f(x)_{min}=f(n)$

(2) $a<0$ 时

三. 题型

题型一: 函数定. 区间定.

已知函数 $f(x)=x^2-2x-3$

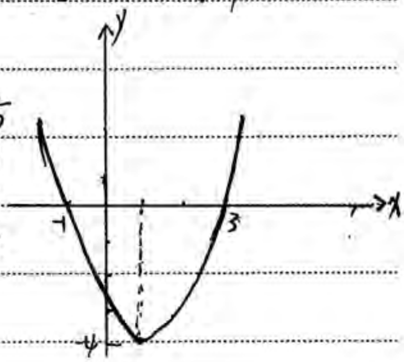
(1) $x\in[-2,0]$ 最值　　(2) $x\in[\frac{1}{2},4]$. 求最值

解：(1) $f(x)_{min} = f(0) = -3$

$\cancel{(2)}$ $f(x)_{max} = f(-2) = 4+4-3=5$

(2) $f(x)_{min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}-1-3=\frac{15}{4}$

$f(x)_{max} = f(4) = 16-8=3=5$



题型二. 函数定，区间变

例：$f(x)=x^2-2x-3$. 求 $x\in[t,t+2]$ 上的最值

解：①当 $t+2<1$ 即 $t\le -1$ 时

$f(x)_{min} = f(t+2)$

$f(x)_{max} = f(t)$

②当 $t>1$ 时

$f(x)_{min} = f(t)$

$f(x)_{max} = f(t+2)$

③当 $t<1<t+2$ 即 $-1<t<1$ 时.

$f(x)_{min} = f(1)$

i: 当 $t+1<1$ 即 $-1<t<0$ 时

$f(x)_{max} = f(t)$

ii: 当 $t+1\ge 1$, 即 $0\le t<1$ 时

$f(x)_{max} = f(t+2)$

题型三. 函数变，区间定

例：求 $f(x)=x^2+2ax+3$ 在 $x\in[-2,2]$ 上的最值.

解： 对称轴 $x=-a$.

①当 $-a\geq 2$. 即 $a\leq -2$ 时

$f(x)_{min}=f(2)$

$f(x)_{max}=f(-2)$

②当 $-a\leq -2$. 即 $a\geq 2$ 时.

$f(x)_{min}=f(-2)$

$f(x)_{max}=f(2)$

③当 $-2<-a<2$ 即 $-2<a<2$ 时.

$f(x)_{min}=f(-a)$

i: 当 $0<a<2$ 时: ii: 当 $-2<a<0$ 时

$f(x)_{max}=f(2)$ $f(x)_{max}=f(-2)$

例: 函数 $f(x)=ax^2+4ax+(a^2-1)$ $(a\neq 0)$. 求 $x\in[-4,1]$ 上最值

题型四：系数变、区间变

例：已知 $y^2=4a(x-a)$ $(a>0)$，求 $u=(x-3)^2+y^2$ 最小值

解：$u=x^2-6x+9+4ax-4a^2$ $x\geq a$

$=x^2+(4a-6)x+(9-4a^2)$ $\therefore x\in[a,+\infty)$

对称轴：$x=-\dfrac{4a-6}{2}=3-2a$

①当 $a<3-2a$，即 $a<1$ 时

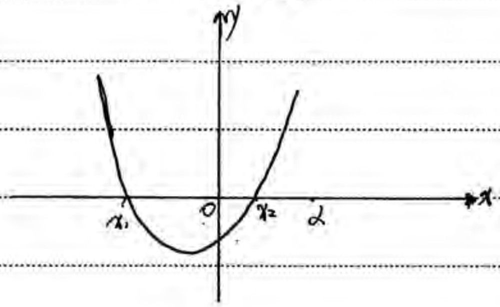
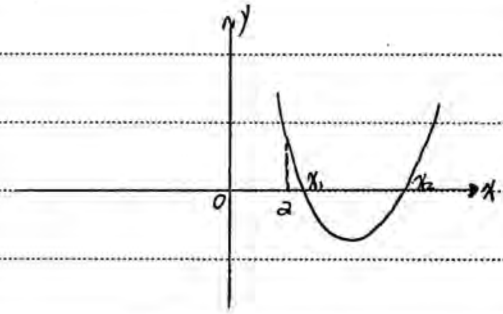
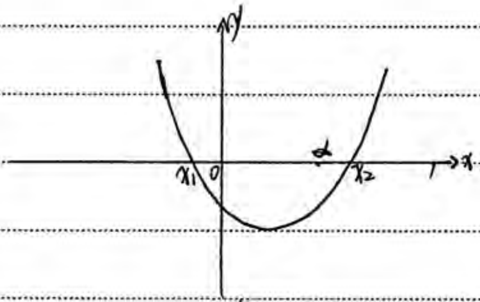
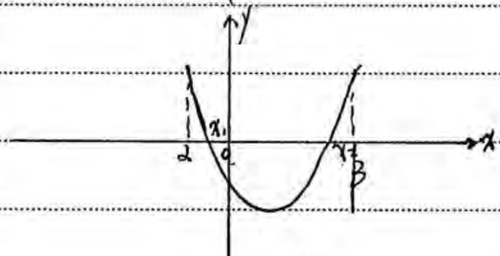
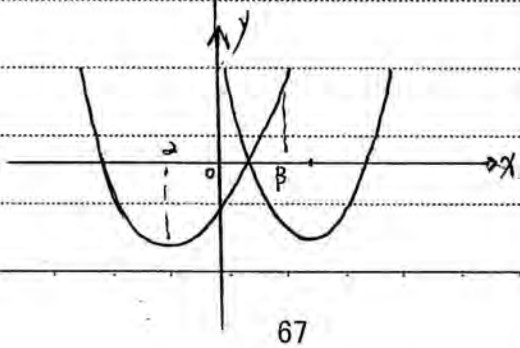
$u_{min}=(3-2a)^2+(4a-6)(3-2a)+(9-4a^2)=12-8a^2$

②当 $a\geq 3-2a$ 即 $a\geq 1$ 时

$u_{min}=a^2+(4a-6)a+(9-4a^2)=a^2-6a+9=(a-3)^2$

一元二次方程根的分布

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$

根的分布	函数图象	充要条件
$x_1 < x_2 < \alpha$		$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \\ f(\alpha) > 0 \end{cases}$
$\alpha < x_1 < x_2$		$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \alpha \\ f(\alpha) > 0 \end{cases}$
$x_1 < \alpha < x_2$		$f(\alpha) < 0$
$x_2 \in (\alpha, \beta)$		$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \end{cases}$
x_1, x_2中只有一个在(α, β)内		$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

"方程的两根"通常指包含有两个相等实根的情况

例1:

方程: $x^2-2ax+4=0$ ①两根均大于1，求a的范围 ②两根一个大于1，一个小于1 ③两根一个在(0,1)内，一个在(6,8)内

解: ① $\begin{cases} \Delta=4a^2-16\geq0 \\ -\frac{2a}{2}>1 \\ 1-2a+4>0 \end{cases}$ $\therefore a\in[2,\frac{5}{2}]$

② $1-2a+4<0$ $\therefore a>\frac{5}{2}$

③ $\begin{cases} 0-0+4>0 \\ 1-2a+4<0 \\ 36-12a+4<0 \\ 64-16a+4>0 \end{cases}$ $\therefore \frac{10}{3}<a<\frac{17}{4}$

例2: 关于x的方程 $9^x+(a+4)3^x+4=0$ 有实根，求a范围

解: 设 $t=3^x$ $(t>0)$

$\therefore t^2+(a+4)t+4=0$

$\begin{cases} \Delta=(a+4)^2-16\geq0 \\ t_1+t_2=-(a+4)>0 \\ t_1\cdot t_2=4>0 \end{cases}$

例3: 关于x方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一负根，求a范围.

解: (1) 一负一正时,

$\begin{cases} \Delta=4-4a>0 \\ x_1x_2=\frac{1}{a}<0 \end{cases}$ $\therefore a<0$

$a=0$时 $2x+1=0$, $\therefore x=-\frac{1}{2}$. $\therefore$ 成立

(2) 两个负根时,

$$\begin{cases} \Delta = 4-4a \geq 0 \\ x_1+x_2 = \frac{-2}{a} < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0 \end{cases}$$ $\therefore 0 < a \leq 1$ $\therefore$ 综上：，$a \leq 1$

例4. 关于x方程 $x^2+(m-1)x+1=0$，在区间 $[0,2]$ 上有实根 求m范围

解：(1) 一根在 $[0,2]$ 上

$(0+0+1) \times [4+2(m-1)+1] \leq 0$

$\therefore m \leq -\frac{3}{2}$

(2) 两根在 $[0,2]$ 上

$$\begin{cases} \Delta = (m-1)^2-4 \geq 0 \\ 0 < \frac{1-m}{2} < 2 \\ 0+0+1 \geq 0 \\ 4+2(m-1)+1 \geq 0 \end{cases}$$ $\therefore -\frac{3}{2} \leq m \leq -1$

$\therefore$ 综上：$m \in (-\infty, -1]$

(1) 端点：$f(0)=1$，$f(2) = 4+2(m-1)+1=0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

(2) 在 $(0,2)$ 上

① 两相等实根

② 两不等实根，只有一个在 $(0,2)$ 上

③ 两不等实根都在 $(0,2)$ 上.

例5. 函数 $f(x) = x^2-(2a-1)x+(a^2-2)$ 与非负x轴至少有一个交点，求 a的范围

解：至少有一个正根或一个根为0

(1) 当 $x_1=0$ 时

$a^2-2=0$ $\therefore a = \pm\sqrt{2}$

(2) 当一个根为正时

$$\begin{cases} \Delta=(2a-1)^2-4(a^2-2)>0 \\ x_1x_2=a^2-2<0 \end{cases} \quad \therefore a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

(3) 当两根为正时

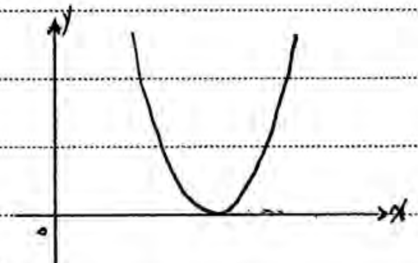
$$\begin{cases} \Delta=(2a-1)^2-4(a^2-2)>0 \\ x_1+x_2=2a-1>0 \\ x_1x_2=a^2-2>0 \end{cases} \quad \therefore a\in(\tfrac{1}{2},\sqrt{2})$$

(1) 交点为(0,0)时

$a^2-2=0 \qquad \therefore a=\pm\sqrt{2}$

(2) 一个交点时

①



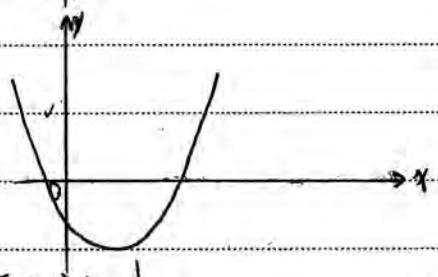
$\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-2)=0$

$\therefore a=\frac{9}{4}$

当$a=\frac{9}{4}$时, $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=0$

$\therefore x=\frac{7}{4} \qquad \therefore$ 成立

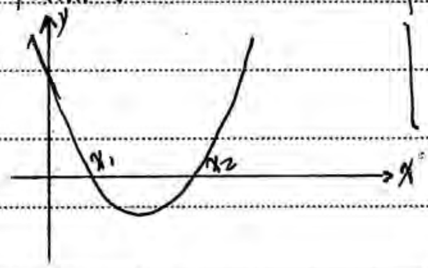
②



$f(0)=a^2-2<0$

$\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

(3) 两个交点时



$$\begin{cases} \Delta=(2a-1)^2-4(a^2-2)>0 \\ \frac{2a-1}{2}>0 \\ f(0)=a^2-2>0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}<a<\frac{9}{4}$$

$\therefore$ 综上: $a\in[-\sqrt{2},\frac{9}{4}]$

函数与方程

一、零点

1. 定义：使 $f(x)=0$ 的实数 x，叫做函数 $y=f(x)$ 的零点

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 图象与 x 轴有交点

$\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点

2. 零点存在定理

$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点，即存在 $x\in(a,b)$，使得 $f(x)=0$，这个 x 也就是方程 $f(x)=0$ 的根

不能判断零点个数

3. 二分法

对于在区间 $[a,b]$ 上连续不断，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$ 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在区间一分为二，使区间的两端点逐步逼近零点，进而得到零点（或对应方程的根）近似解方法叫做二分法

4. 二分法步骤

(1) 在区间 $[a,b]$，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精度 (ε)

(2) 求 a、b 中点 x_1

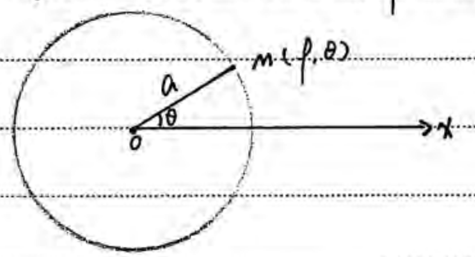
(3) 计算 $f(x_1)$，若 $f(x_1)=0$，则 x_1 为零点；若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令 $b=x_1$，若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令 $a=x_1$

(4) 判断是否达到精度 (ε)，即 $|a-b|<\varepsilon$，则零点近似值为 a 或 b 或 a、b 间任意值

简单的极坐标方程

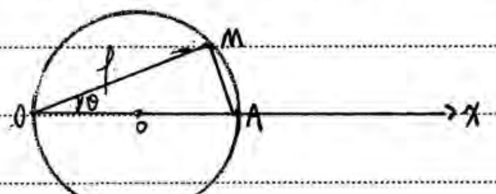
一、圆的极坐标方程

1. 以极点为圆心，a为半径的圆的方程 $(a>0)$



$\rho = a$

2. 已知 $O(0,0)$，$A(2a,0)$，圆以OA为直径 $(a>0)$



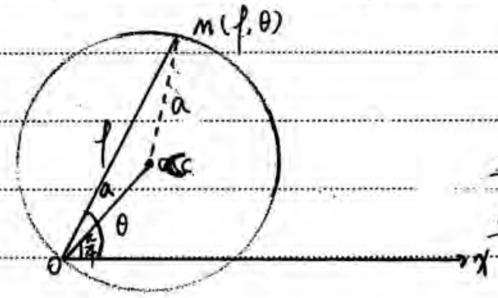
$$\rho = 2a\cdot\cos\theta$$
$$\downarrow$$
$$x^2+y^2-2ax=0$$

$\rho = 2a\cdot\cos\theta$

$\rho\cdot\rho = 2a\rho\cos\theta$

$\rho^2 = x^2+y^2 - 2a\cdot\underbrace{\rho\cos\theta}_{x} = 2ax$

3. 圆心为$(a,\frac{\pi}{4})$，半径为a的圆



$\cos(\theta-\frac{\pi}{4}) = \frac{\rho^2+a^2-a^2}{2\rho a}$

$\therefore \rho = 2a\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$

当 $M(0,\frac{3\pi}{4})$ 时，符合以上方程

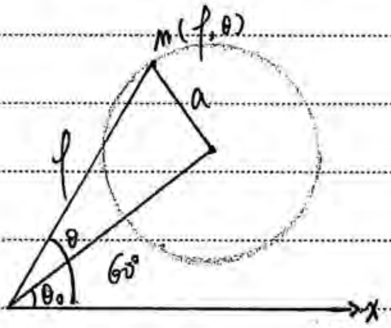
当 $M(2a,\frac{\pi}{4})$ 时，符合以上方程

$\rightarrow \rho^2 = 2a\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$

$x^2+y^2 = 2a\rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta)$

$x^2+y^2 = \sqrt{2}ax+\sqrt{2}ay$

4. 圆心为(ρ_0, θ_0)、半径为a的圆 $(a>0)$

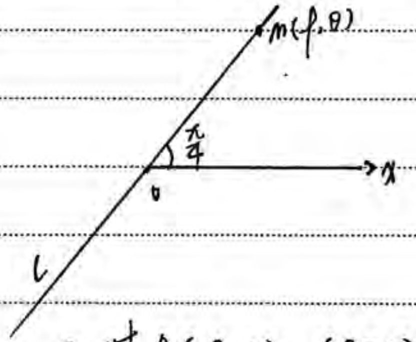


$$\cos(\theta-\theta_0)=\frac{\rho^2+\rho_0^2-a^2}{2\rho\cdot\rho_0}$$

$$\rightarrow (x-\rho_0\cdot\cos\theta_0)^2+(y-\rho_0\sin\theta_0)^2=a^2$$

二. 直线的极坐标方程:

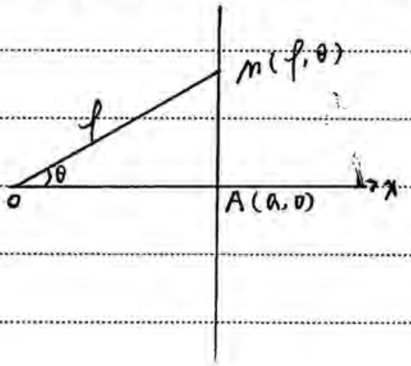
1. 过极点O且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线l方程



$\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ $(\rho\geq 0)$

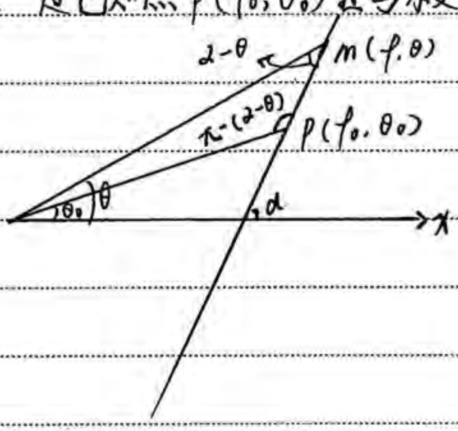
$\theta=\frac{\pi}{4}$ $(\rho\in R)$

2. 过$A(a,0)$ $(a>0)$ 且垂直于极轴的直线l方程



$$\rho\cos\theta=a$$

3. 过已知点 $P(\rho_0,\theta_0)$ 且与极轴成 α 角的直线 l 方程.



$$\frac{\sin\angle OMA}{\rho_0}=\frac{\sin\angle OPM}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\rho_0}=\frac{\sin[\pi-(\alpha-\theta_0)]}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho_0\sin(\alpha-\theta_0)=\rho\cdot\sin(\alpha-\theta)$$

参数方程

一. 参数方程定义.

在平面直角坐标系中，曲线上点 (x,y) 都是某个变数 t 的函数

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

并且对于 t 的每一个允许值，所确定的点 $M(x,y)$ 都在这条曲线上，那么方程叫做这条曲线的参数方程.

例：把参数方程化为普通方程.

(1) $\begin{cases} x=\sqrt{t}+1 \\ y=1-2\sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数) $\Rightarrow x\geq 1$ $\Rightarrow y=-2x+3$ $(x\geq 1)$

(2) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta \\ y=1+\sin 2\theta \end{cases}$ (θ 为参数) $\Rightarrow y=x^2$ $(x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}])$

二. 常见曲线的参数方程

1. 圆 $x^2+y^2=r^2$ 的参数方程为：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)

2. 圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 的参数方程 $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)

3. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为: $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{a}{\cos\theta}=a\sin\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ (θ为参数)

5. 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{2p}{\tan^2\theta} \\ y=\frac{2p}{\tan\theta} \end{cases}$ (θ为参数)

令 $t=\frac{1}{\tan\theta}$

$\therefore \begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$ (t为参数)

6. 直线 $y-y_0=\tan\alpha(x-x_0)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$ (t为参数)

解三角形

一. 正弦定理

1. 定理：三角形中，各边和它所对角的正弦值的比相等，并且都等于2R（2R为三角形外接圆直径）

即：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

2. 定理变形

(1) $a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$

(2) $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$

(3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(4) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$（合比定理）

3. 三角形中的几条结论

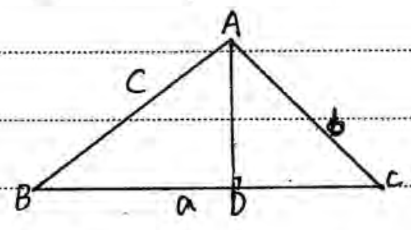
(1) $a=b \Leftrightarrow \sin A=\sin B$

(2) $a>b>c \Leftrightarrow A>B>C \Leftrightarrow \sin A>\sin B>\sin C$

二. 三角形面积公式

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B$

三. 射影定理



$$\begin{cases} a=c\cos B+b\cos C \\ b=a\cos C+c\cdot\cos A \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$$

例：在△ABC中

(1) $a=4$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，解三角形

(2) $a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，求∠B

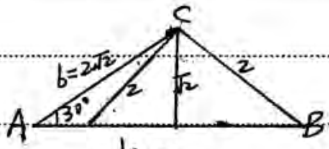
解：(1) $\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{2}$. $\angle C=75^\circ$

$\therefore \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\therefore b=2\sqrt{6}$ $\therefore c=4\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ=2+2\sqrt{3}$

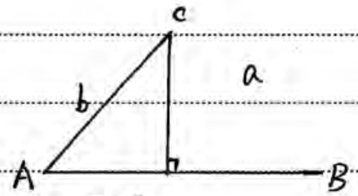
(2) $\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin B}$

$\therefore \frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$ $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore \angle B=45^\circ$ 或 135°

(2) 验证：



总结：已知 a.b.A，求B



① 当 $a<b\sin A$ 时，B无解

② 当 $a=b\sin A$ 时，$B=90^\circ$

③ 当 $b\sin A<a<b$ 时，B有2个解

④ 当 $a\geq b$ 时，B有1个解

四、余弦定理

1、定理：三角形中，任何一边的平方等于其他边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦乘积的二倍

即 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \end{cases}$

五、解三角形的类型

1、已知 A，B，a

解: $C=\pi-A-B$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

2. 已知 a. b. A

解: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow B$ (可能有几种情况)

$C=\pi-A-B$

3. 已知 a. b. c

解: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

① $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ (大边对大角)

② 余弦定理求角 (首选)

4. 已知 a. b. c

利用余弦定理

解三角形题型

一. 求解三角形基本量.

1. $\triangle ABC$中 $a=2$, $b=2\sqrt{2}$, $\angle C=15^\circ$, 求 A

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=4+8-2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=12-4\sqrt{3}-4=8-4\sqrt{3}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\therefore c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore A=30^\circ$

2. $\triangle ABC$中, $A=60^\circ$, $b=1$, $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 求 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. $\therefore c=4$

$a^2=1+16-8\cos A=17-4=13$ $\therefore a=\sqrt{13}$

$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}/2}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$

3. $\triangle ABC$中. $a=4$. $b+c=5$, $\tan A+\tan B+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan B$

(1) 求$\angle C$. (2) 求$S_{\triangle ABC}$

解: (1) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$

$\Rightarrow \tan(A+B)-\tan(A+B)\tan A\tan B=\tan A+\tan B$

$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan(A+B)\tan A\tan B=\tan(A+B)$

又∵ $\tan A+\tan B-\sqrt{3}\tan A\tan B=-\sqrt{3}$

∴ $\tan(A+B)=-\sqrt{3}$. ∴ $A+B=\frac{2\pi}{3}$. ∴ $C=\frac{\pi}{3}$

(2) $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

∴ $c^2=16+(5-c)^2-8(5-c)\times\frac{1}{2}$

∴ $c=\frac{7}{2}$. ∴ $b=\frac{3}{2}$)

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

4. $\triangle ABC$中. $A=\frac{\pi}{6}$, $(1+\sqrt{3})c=2b$

(1) 求$\angle C$ (2) 若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$. 求$a,b,c$

解: (1) $\frac{b}{c}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

∴ $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin(\frac{5\pi}{6}-C)}{\sin C}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin C=\cos C$. ∴ $C=\frac{\pi}{4}$

(2) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}\Rightarrow ab\cdot\cos C=1+\sqrt{3}$ $B=\frac{7\pi}{12}$

∴ $ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$ ∴ $ab=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

$$\begin{cases}(1+\sqrt{3})c=2b\\ ab=\sqrt{2}+\sqrt{6}\\ \frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1+\sqrt{3}\\ c=2\end{cases}$$

5. $\triangle ABC$中，$AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$，AC边上中线 $BD=\sqrt{5}$，求 $\sin A$ 的值。

解：$c=\frac{4\sqrt{6}}{3}$　$\sin B=\frac{\sqrt{30}}{6}$　$\cos C=\cos(\pi-B)=-\cos B$

$\triangle BCE$中

$(2\sqrt{5})^2=BC^2+\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-2BC\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\therefore BC=2$

$\triangle ABC$中

$AC^2=\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2+4-2\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times2\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}$　　$\therefore AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\therefore \triangle ABC$中　$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$

$\therefore \sin A=\frac{BC\cdot\sin B}{AC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{2\sqrt{21}}{3}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$

二、判断三角形形状

1. $\triangle ABC$中，$a\cos A=b\cos B$，判断三角形形状

$\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$

$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cdot\cos B$

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$

$\therefore 2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形

2. $\triangle ABC$中，$2\sin A\cos B=\sin C$，判断三角形形状

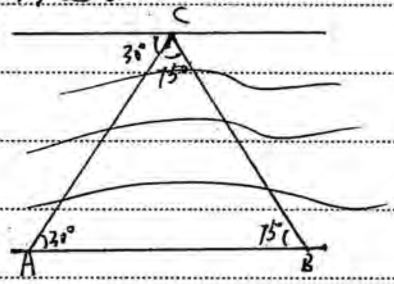
$2\sin A\cos B=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\therefore \sin A\cos B-\cos A\sin B=0$

$\therefore \sin(A-B)=0$　　$\therefore A=B$

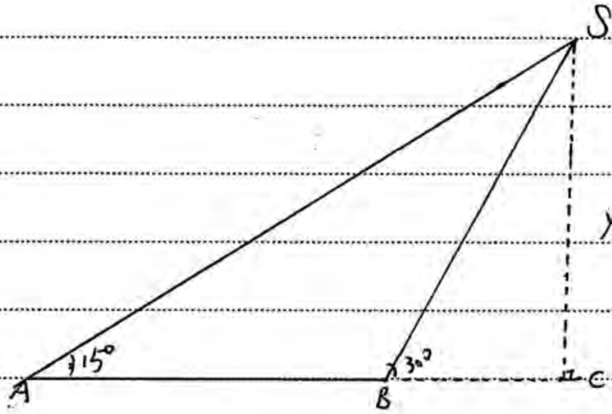
例1: 测量河宽 d



$AC = AB = 120m$

$\therefore d = 60m$

例2.



$v = 30$ 海里/h

灯塔10海里内有暗礁

$AB = 15$ 海里 $= BS$

$SC = 7.5$ 海里 < 10 海里 $\quad \therefore$ 有危险

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形

3. $\triangle ABC$中，$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan A}{\tan B}$，判断三角形形状

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\sin A \cdot \cos B}{\sin B \cdot \cos A}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos A}$$

$$\therefore \sin A \cos A = \sin B \cdot \cos B$$

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B$$

$\therefore$ $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为等腰或直角三角形

解三角形 应用

一、概念

1. 方位角：指北方向线顺时针到目标方向线的夹角

例：方位角30°，即北偏东30°

2. 仰角：与目标视线同在一铅垂线平面内的水平线与目标视线的夹角俯角，目标视线在水平视线上方时，叫仰角

目标视线在水平视线下方时，叫俯角

3. 坡角：坡面与水平面的夹角

坡比：坡角的正切值

二、应用

1. 测量

2. 追及问题

3. 遇险问题

向量

一. 基本概念

1. 向量

既有大小又有方向的量称为向量. 可以用有向线段表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的長度称为模 $|\overrightarrow{AB}|$

2. 零向量：長度为0的向量（方向是任意的）表示为 $\vec{0}$.

3. 单位向量：長度为1的向量（方向不确定）

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 表示与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量

4. 平行（共线）向量：方向相同或相反的非零向量

規定：零向量平行于任意向量

5. 相等向量：大小相等. 方向相同的非零向量

$\vec{a}=\vec{b}$ ✓ 向量可以相等. 但不能比较大小

$\vec{a}>\vec{b}$ ×

6. 相反向量：大小相等. 方向相反的非零向量

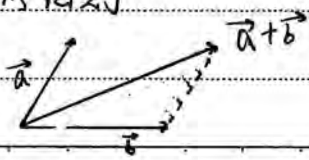
$-\vec{a}$ 是 $\vec{a}$ 的相反向量

二. 向量的基本运算

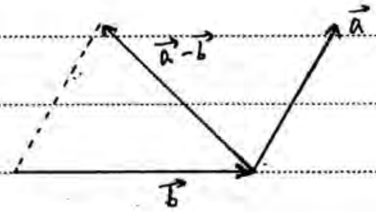
1. 向量的加法

(1) 平行四边形法则

(2) 三角形法则



2. 向量的减法



3. 运算性质

(1) $\vec{a} \pm \vec{0} = \vec{a}$

(2) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

(3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(4) $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$

(5) $-(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a}-\vec{b}$

例：G为△ABC重心，$AG=\frac{2}{3}AD$，$BG=\frac{2}{3}BE$，$CG=\frac{2}{3}CF$

(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (2) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

解：(1) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

$= \frac{2}{3}[\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})]$

$= \frac{2}{3}[\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}]$

$= \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

(2) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$

$= \vec{0}$

重心是中线交点，垂心是三条高的交点，外心是三条垂直平分线交点，内心是角平分线交点。

4. 向量的数乘

$\lambda\vec{a}$ 结果是向量

$\lambda\vec{a}$ ① 大小：$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$

② 方向：
$$\begin{cases} \lambda>0 & \lambda\vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 同向} \\ \lambda<0 & \lambda\vec{a} \text{ 与 } \vec{a} \text{ 反向} \\ \lambda=0 & \lambda\vec{a}=\vec{0} \end{cases}$$

数乘运算法则

(1) $\lambda(u\vec{a}) = u(\lambda\vec{a}) = u\lambda\vec{a}$

(2) $(\lambda+u)\vec{a} = \lambda\vec{a} + u\vec{a}$

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

5. 向量共线的充要条件。

$\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在唯一 λ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

例：$\vec{a}$.$\vec{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + u\vec{b}$，若 A.B.C 共线。

λ, u 应满足什么条件？

解：$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线

$\therefore$ 存在 k，使 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$\therefore \lambda\vec{a}+\vec{b} = k\vec{a} + uk\vec{b}$

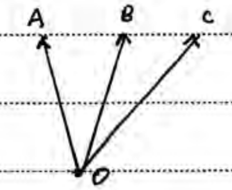
$\therefore \begin{cases} \lambda = k \\ ku = 1 \end{cases}$ $\therefore \lambda u = 1$

6. 三点共线的充要条件。

O. A B C 为平面内不同四点，且 $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$

且 ABC 共线 $\Leftrightarrow$ $\lambda+u=1$

证明：已知 ABC 共线



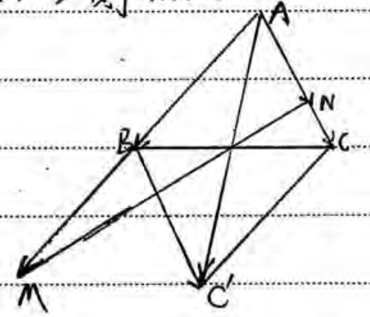
$\because$ A.B.C 共线

$\therefore \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$\therefore \overrightarrow{OA}=-k\overrightarrow{OC}+(k+1)\overrightarrow{OB}$ $\lambda+u=-k+k+1=1$

例1. $\triangle ABC$ 中. O 为 BC 中点，过 O 的直线分别交 AB. AC 于不同两点 M.N，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则 $m+n=2$



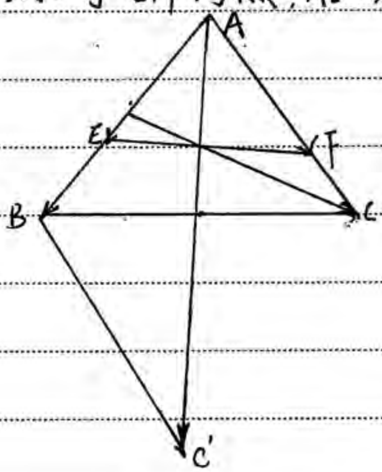
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$

$\therefore \overrightarrow{AC'}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$

$\therefore 2\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AN}$

$\therefore \frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$， $\therefore m+n=2$

2. $\triangle ABC$ 中，过重心 G 作直线交 AB. AC 于 E.F 两点，$\overrightarrow{AE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda_2\overrightarrow{AC}$，求 $\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=3$



$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{AE}$， $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{AF}$

$\therefore 2\overrightarrow{AD}=\frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{AF}$

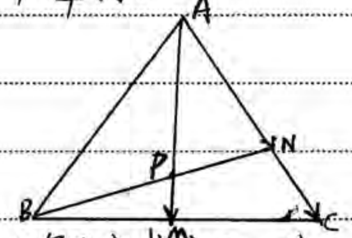
$\therefore 2\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{AF}$

$\therefore \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=3$

3. $\triangle ABC$ 中 M 是 BC 中点，N 在 AC 上，且 AN=2NC. AM 与 BN 交于点 P. 求 AP:PM. 设 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM}$

∴ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM}=k\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AN})=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3k}{4}\overrightarrow{AN}$

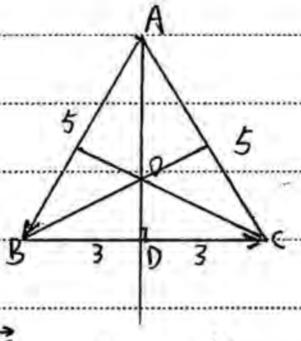


∴ $\frac{k}{2}+\frac{3k}{4}=1$

∴ $k=\frac{4}{5}$ ∴ $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$

∴ $\frac{AP}{PM}=\frac{4}{1}$

4. $\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$BC=6$，三内角平分线交于O，若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{BC}$，求 $\lambda+u=\frac{15}{16}$



解: $AD=4$

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$

$=\frac{1}{2}\times 6\times OD+2\times\frac{1}{2}\times 5\times OD$

∴ $OD=\frac{3}{2}$，∴ $OA=\frac{5}{2}$ ∴ $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

∴ $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{16}\overrightarrow{BC}$

$\frac{AD}{OD}=\frac{AB}{BD}$

∴ $\lambda+u=\frac{15}{16}$

三. 平面向量基本定理.

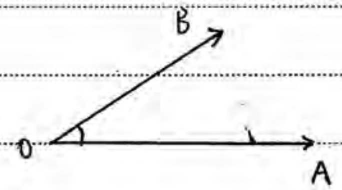
如果 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对这一平面内的任意向量 $\vec{a}$ 有且只有一对实数 λ_1, λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$

$\vec{e_1}$·$\vec{e_2}$ 叫作一组基底.

四. 向量的夹角

如图 $0\leq\theta\leq\pi$

$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$ 同向　　$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$ 反向



注: 求两向量夹角一定要平移两向量使它们同起点.

五：向量的坐标运算 $\vec{a}=(x_1,y_1)$ $\vec{b}=(x_2,y_2)$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2, y_1-y_2)$

(3) $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$

(4) $A(x_1,y_2)$ $B(x_2,y_2)$ 则 $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

2. 向量共线的坐标表示

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff x_1y_2-x_2y_1=0$

$\vec{a}\perp\vec{b} \iff x_1x_2+y_1y_2=0$

3. $\vec{a}=(x,y)$ 则 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ 则 $|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

例1: $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(2,3)$. 求 $2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{b}-2\vec{a}$

$2\vec{a}+3\vec{b}=(-2,4)+(6,9)=(4,13)$

$\vec{b}-2\vec{a}=(2,3)-(-2,4)=(4,-1)$

2. $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(x,1)$, $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$ $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$ 且 $\vec{u}\parallel\vec{v}$. 求 x

$\vec{u}=(2x+1,4)$ $\vec{v}=(2-x,3)$

$\therefore 3(2x+1)-4(2-x)=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

3 ▱ABCD. $A(-2,1)$ $D(-1,3)$ $C(3,4)$，求 B 坐标

设 $B(x,y)$ $\vec{BA}=(x+2,y-1)$ $\vec{CD}=(-4,-1)$

$\therefore \vec{AD}=(1,2)$. $\vec{BC}=(3-x,4-y)$ $\therefore \vec{BA}\parallel\vec{CD}$. $\vec{AD}\parallel\vec{BC}$

$\therefore B(2,2)$

4 $\vec{a}=(1,-3)$ $\vec{b}=(1,2)$. 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角

$|\vec{a}|=\sqrt{10}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1-6=-5$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

六、向量的数量积

1. 定义：$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$（$\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角）

$|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，则$|\vec{b}|\cdot\cos\theta$叫$\vec{b}$

运算结果是实数 $\quad$ 在$\vec{a}$上的投影，$|\vec{a}|\cdot\cos\theta$叫$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影

规定：零向量与任意向量的数量积都为0

2. 非零向量$\vec{a}$与非零向量$\vec{b}$夹角

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \iff 0 \le \theta \le 90^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \theta = 90^\circ \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \iff 90^\circ \le \theta \le 180^\circ$

特殊：$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

例 $|\vec{e_1}|=2$，$|\vec{e_2}|=1$，$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$夹角为60°，若$2t\vec{e_1}+7\vec{e_2}$与$\vec{e_1}+t\vec{e_2}$夹角为钝角，求t的范围.

解：$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 2\cos60^\circ = 1$

$(2t\vec{e_1}+7\vec{e_2})(\vec{e_1}+t\vec{e_2})$

$= 2t|\vec{e_1}|^2 + 2t^2\cdot1 + 7\times1 + 7t|\vec{e_2}|^2$

$= 8t + 2t^2 + 7 + 7t^2 = 2t^2 + 15t + 7 < 0$

$\therefore -7 < t < -\frac{1}{2}$

$\triangle$ 当$2t\vec{e_1}+7\vec{e_2} = \lambda(\vec{e_1}+t\vec{e_2})$ 且$\lambda<0$时，$t = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore t\in(-7, -\frac{\sqrt{14}}{2}) \cup (-\frac{\sqrt{14}}{2}, -\frac{1}{2})$

3. 数量积的运算律

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

※ $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\neq\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

(4) $(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

(5) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

4. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

例1: 单位向量 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. 夹角为 $60°$. 求 $\vec{a}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}$ 与 $\vec{b}=2\vec{e_2}-3\vec{e_1}$ 夹角.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{e_1}+\vec{e_2})(2\vec{e_2}-3\vec{e_1})$

$=4\vec{e_1}\vec{e_2}-6\vec{e_1}^2+2\vec{e_2}^2-3\vec{e_1}\vec{e_2}=4\times\frac{1}{2}-6+2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2=7$. $\therefore|\vec{a}|=\sqrt{7}$. 同理 $|\vec{b}|=\sqrt{7}$

$\therefore\cos\theta=\dfrac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\frac{1}{2}$. $\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$

2. $|\vec{a}|=1$. $|\vec{b}|=\sqrt{2}$. $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$. 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角

解: $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$. $\therefore\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore 1-1\times\sqrt{2}\cos\theta=0$

$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

3. $|\vec{a}|=1$. $|\vec{b}|=2$. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $120°$. 求 $|2\vec{a}+\vec{b}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\cos120°=-1$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})^2=4\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{a}\vec{b}=4+4-4=4$

$\therefore|2\vec{a}+\vec{b}|=2$

4. $\triangle ABC$中，O为平面内一点

(1) 若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则O为三角形 重心

(2) 若 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，则O为三角形 外 心

(3) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则O为三角形 垂心

解： (1) (2) 同顶前

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\therefore \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$

$\therefore OB\perp CA$

同理可证：

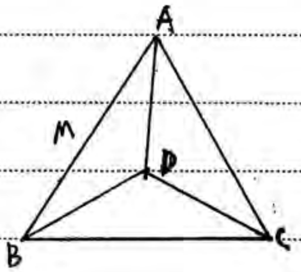
$\therefore$ O为三角形垂心

5. 已知$\triangle ABC$中，O为$\triangle ABC$内点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\frac{[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]}{3}$

则P的轨迹一定过$\triangle ABC$的重心

$\overrightarrow{OP}=\frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{(1+2\lambda)}{3}\overrightarrow{OC}$， M为AB中点

$\because \frac{2(1-\lambda)}{3}+\frac{1+2\lambda}{3}=1$



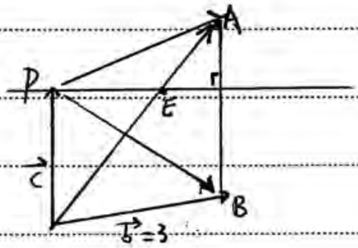
$\therefore$ P, M, C 三点共线

$\therefore$ P在CM上

$\therefore$ P为重心

5. O A B 是平面上不共线三点，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，设 P 为线段 AB 垂直平分线上一点，若 $\overrightarrow{OP}=\vec{c}$，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，求 $\vec{c}(\vec{a}-\vec{b})$ 的值

$|\overrightarrow{EA}|=|\overrightarrow{EB}|$



$\therefore |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{EA}|=|\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{EB}|=5$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}$

$\triangle OPA$ 中，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}-\vec{c}$，$\triangle OBP$ 中，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{c}$

$\because |\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$

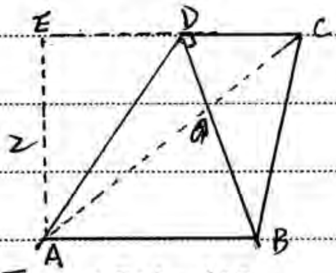
$\therefore |\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|$ $\therefore |\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2$

$\therefore 25+c^2-2\vec{a}\vec{c}=9+c^2-2\vec{b}\vec{c}$

$\therefore 16=2\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}$ $\therefore \vec{c}(\vec{a}-\vec{b})=8$

6. 四边形ABCD中，$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{DC}|=4$，$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{DC}|=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$。求 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值

$|\overrightarrow{BD}|\cdot(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)=4$



$\therefore |\overrightarrow{BD}|(4-|\overrightarrow{BD}|)=4$

$\therefore |\overrightarrow{BD}|=2=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}$

$\therefore |\overrightarrow{EC}|=2$，$\triangle ACE$中 $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，$\angle ECA=45°$

$\therefore (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\overrightarrow{AC}=2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

七、数量积的坐标表示

1、$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角 θ 为锐角 $\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2>0$（去掉$\vec{a}$与$\vec{b}$同向）

钝角 $\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2<0$（去掉$\vec{a}$与$\vec{b}$反向）

2. $\cos\theta = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

例：$\vec{m}=(-2,4x)$，$\vec{n}=(-3x,-x)$，$\vec{m}$与$\vec{n}$夹角为钝角，求x范围

$\vec{m}\cdot\vec{n}=6x-4x^2<0$

$\therefore 4x^2-6x>0$　　$\therefore x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$

当$\vec{m}$与$\vec{n}$反向时 $\begin{cases}-2=-3\lambda x \\ 4x=-\lambda x\end{cases}$ $(\lambda<0)$

$\therefore x=-\frac{1}{6}$

$\therefore x\in(-\infty,-\frac{1}{6})\cup(-\frac{1}{6},0)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

数　列

一、数列的概念及其表示

1. 数列定义

按照一定顺序排列的一列数，叫做数列

数列中的每一个数称为项

2. 分类

$\begin{cases}\text{有穷数列}\\ \text{无穷数列}\end{cases}$　　$\begin{cases}\text{有界数列}\\ \text{无界数列}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{递增数列}\\ \text{递减数列}\\ \text{摆动数列}\\ \text{常数列}\end{cases}$

3. 数列的通项公式

(1) 定义：数列第n项 a_n 与n之间的关系式

(2) 常用求通项公式的方法

① 观察法

② 公式法 $a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2) \end{cases}$

③ 累加法

④ 累乘法

$a_1=1$，$2^{n-1}a_n=a_{n-1}$ $(n\in N^*$ 且 $n\geq 2)$ 求 a_n

解：$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore \frac{a_n}{1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}\times\cdots\times\frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2^{1+2+\cdots+(n-1)}}$

例1：写出通项：

(1) 3，33，333，⋯

(2) $\frac{2}{3}$，-1，$\frac{10}{7}$，$-\frac{17}{9}$，$\frac{26}{11}$，$-\frac{37}{13}$ ⋯

(3) $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$

(4) 1，0，1，0，1 ⋯

解：(1) $a_n=\frac{3}{9}(10^n-1)$

(2) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^2+1}{2n+1}$

(3) $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$

(4) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2}$

2. 已知$\{a_n\}$前n项和S_n，求通项a_n.

解：(1) $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\geq 2)\end{cases}$

解：(1) $a_n=\begin{cases}2\ (n=1)\\ 2n-1\ (n\geq 2)\end{cases}$ (3) $a_n=3^{n-1}\cdot 2$

(4) $a_n=\begin{cases}5 & (n=1)\\ 2^{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$

(2) $a_n=6n-5$

3. $\{a_n\}$为正项数列 且 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)$，求通项a_n

解：$S_n=\frac{1}{4}(a_n^2+2a_n-3)$

$\therefore a_1=S_1=\frac{1}{4}(a_1^2+2a_1-3)$

$\therefore a_1=3$

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{4}(a_n^2+2a_n-3)-\frac{1}{4}(a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3)$

$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2$

$\therefore$ 公差为2

$\therefore a_n=3+2(n-1)=1+2n$

$a_1=1+2\times1=3$ $\therefore$ 符合

$\therefore a_n=2n+1$

4. $\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+5$ ① 求a_n

解：$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2(n-1)+5$ ②

①－② 得：

$\frac{1}{2^n}a_n=2n+5-2(n-1)-5$

$=2n+5-2n+2-5$

$=2$

$\therefore\ a_n = 2\times 2^n = 2^{n+1}$

$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2n+5$

$n=1$时. $b_1 = 7$

$n\geq 2$时. $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2^n} a_n = 2 \quad \therefore\ a_n = 2^{n+1}$

5. $a_n = \frac{9^n(n+1)}{10^n}\ (n\in N^*)$ 求最大项

解: $a_n - a_{n-1} = \frac{9^n(n+1)}{10^n} - \frac{9^{n-1}\cdot n}{10^{n-1}}$

$= \frac{9^{n-1}(9-n)}{10^{n-1}}$

$n=9$时. $a_9 = a_8$

$n<9$时. $a_n - a_{n-1} > 0$

$n>9$时. $a_n - a_{n-1} < 0$

$\therefore$ 最大项为 a_8 或 a_9

$\therefore\ a_8 = a_9 = \frac{9^9}{10^8}$

6. $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = \frac{1}{2}\ (n\in N^*)$. $a_2 = 2$. 求 S_{21}

解: $a_1 = \frac{1}{2} - a_2 = -\frac{3}{2}$

$S_{21} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{20} + a_{21})$

$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 10$

$= -\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2}$

二. 等差数列

1. 定义

如果一个数列每一项与它前一项的差都等于同一个常数，叫做等差数列。这个常数叫做公差

$a_n - a_{n-1} = d$ （$n \geq 2$. d为常数）

2. 通项公式

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d & (d\text{为公差}) \\ a_n = a_m + (n-m)d \end{cases}$$

3. 等差中项

a. A. b 成等差. 则 $A = \frac{a+b}{2}$ 为等差中项

4. 等差数列前n项和公式

$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$

例1: $\{a_n\}$为等差数列. d为公差

(1) $a_7 - 2a_4 = -1$, $a_3 = 0$. 求d

(2) $a_2 + a_8 = 12$. 求a_5

(3) $S_2 = 4$. $S_4 = 20$. 求d

(4) $a_3 = 7$. $a_5 = a_2 + 6$. 求a_1

(5) $a_4 = 2$, $a_2 + a_3 = 13$. 求$a_4 + a_5 + a_6$

(6) $a_1 a_5 = 9$, $a_2 = 3$. 求a_4

(7) $a_1 + 3a_4 + a_{15} = 60$. 求$2a_9 - a_{10}$

(8) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$. $a_n = 33$. 求n

解: (1) $a_3 + 4d - 2(a_3 + d) = -1$

$\therefore 4d - 2d = -1$. $\therefore d = -\frac{1}{2}$

(2) $a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2} = 6$

(3) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 4 & ① \\ a_3 + a_4 = 16 & ② \end{cases} \Rightarrow$ ②-①. $2d + 2d = 12$

$\therefore d = 3$

(4) $a_5-a_2=6 \Rightarrow 3d=6$. $\therefore d=2$

$a_6=a_3+3d=7+6=13$

(5) $a_4-2d+a_4-d=13 \Rightarrow 4-3d=13$. $\therefore d=-3$

$a_4+a_5+a_6=2a_5=2\times(2-3)=-2$

(6) $(a_2-d)(a_2+3d)=9 \Rightarrow (3-d)(3+3d)=9$. $\therefore d=0$ 或 2

$\therefore a_4=a_2+2d=3+2d=3$ 或 7

(7) $a_1+3(a_1+7d)+a_1+14d=60 \Rightarrow a_1+7d=12$

$2a_9-a_{10}=2(a_1+8d)-(a_1+9d)=a_1+7d=12$

(8) $a_1+d+a_1+4d=4$ $\therefore d=\frac{2}{3}$

$\therefore a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(n-1)=33$

$\therefore n=50$

5. 等差数列的判定方法

(1) 定义法：$a_n-a_{n-1}=d \quad (n\geq 2)$

(2) 通项法：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)=kn+p$

(3) 中项法：$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$

(4) 前n项和法：$S_n=an^2+bn \quad (a,b$ 为常数$)$

6. 等差数列性质

(1) $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$

(2) $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

(3) a_n 为等差数列，d 为公差，则 a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, a_{k+3m} 组成以 m 为公差的等差数列

(4) $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 为等差数列，则 $\{a_n+b_n\}$ $\{ka_n\}$，$\{ka_n+pb_n\}$

为等差数列

(5) $\{a_n\}$ 为等差数列 $\begin{cases} d>0 & \text{，则 } S_n \text{ 有最小值} \\ d<0 & \text{，则 } S_n \text{ 有最大值} \\ d=0 & \text{，则 } a_n \text{ 为常数列} \end{cases}$

(6) $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $a_n=m$，$a_m=n$，则 $a_{m+n}=0$

$$a_{m+n}=a_m+nd=a_m+n\cdot\frac{a_n-a_m}{n-m}$$
$$=n+n\frac{m-n}{n-m}=n-n=0$$

7. 等差数列前n项和性质

(1) $n\geq 2$ $a_n=S_n-S_{n-1}$ （适用于所有数列）

(2) S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，… 可以构成等差数列

(3) $S_{2n-1}=(2n-1)a_n \Rightarrow a_n=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$

↓

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 为等差数列，且其前n项和分别为 S_n，T_n。

则 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$

(4) 项数为偶数2n项，则 $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$

$$S_{偶}-S_{奇}=nd$$
$$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(5) 项数为2n-1项，则 $S_n=(2n-1)a_n$

$$S_{奇}-S_{偶}=a_1+(n-1)d=a_n$$
$$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{n-1}{n}$$

(6) $S_n=m$，$S_m=n$，则 $S_{m+n}=-(m+n)$

(7) $S_m=S_n$，则 $S_{m+n}=0$

例1：$\{a_n\}$为等差数列，S_n为前n项和

(1) 共10项，$S_{奇}=15$，$S_{偶}=30$，求d

(2) $a_3+a_4+a_5=12$，求S_7

(3) $S_3=9$，$S_6=36$，求 $a_7+a_8+a_9$

(4) $a_1+a_2=4$，$a_7+a_8=28$，求S_{10}

(5) $3(a_3+a_5)+2(a_7+a_{10}+a_{13})=24$，求 S_{13}

(6) $a_3-a_7=-16$，$a_4+a_6=0$，求 a_n

(7) $\{b_n\}$也为等差数列，其前n项和T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$，求$\frac{a_{11}}{b_{11}}$

(8) $\{a_n\}$前4项和为21，末4项和为67，且各项和为286，求项数n。

(9) $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，$S_{2m-1}=38$，求m

(10) $a_1+a_4+a_7=45$，$a_2+a_5+a_8=39$，求 $a_3+a_6+a_9$ 和 $a_8+a_{11}+a_{14}$ 值

解：(1) $S_{偶}-S_{奇}=5d=15$

$\therefore d=3$

(2) $a_3+a_5=2a_4 \Rightarrow 3a_4=12 \Rightarrow a_4=4$

$\therefore S_7=7a_4=28$

(3) $a_4+a_5+a_6=27$，$\therefore a_5=9$

$a_1+a_2+a_3=9$，$\therefore a_2=3$

$\therefore a_8=a_5+3d=9+6=15$

$\therefore a_7+a_8+a_9=3a_8=45$

(4) $a_7+a_8=a_2+a_7=16=2a_5$，$\therefore a_5=8$

$\therefore a_5+2d+a_5+3d=28. \quad \therefore 16+5d=28. \therefore d=\frac{12}{5}$

$\therefore a_{10}=a_5+5d=8+12=20$

$\therefore S_{10}=4\times 2a_5+a_5+a_{10}=92$

(5) $3(a_1+2d+a_1+4d)+2(3a_1+6d+9d+12d)=24$

$\therefore 12a_1+72d=24$

$\therefore a_1+6d=2$

$S_{13}=13a_1+\frac{12\times 13}{2}d=13a_1+78d=13(a_1+6d)=26$

(6) $\begin{cases} a_1+2d-(a_1+6d)=-16 \\ a_1+3d+a_1+5d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-16 \\ d=4 \end{cases}$

$\therefore a_n=-16+4(n-1)=4n-20$

(7) $\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+1}{4(2n-1)+27}=\frac{14n-6}{8n+23}=\frac{14\times 11-6}{8\times 11+23}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}$

(8) $21+67=88 \qquad 286\div 88=3\cdots 22$

$\frac{22}{88}=\frac{1}{4} \qquad \therefore n=3\times 8+\frac{1}{4}\times 8=26 \qquad 286=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

(9) $2a_m-a_m^2=0 \Rightarrow a_m=0$ 或 2

$a_m=\frac{S_{2m-1}}{2m-1}=\frac{38}{2m-1}$

$\therefore$ ① $\frac{38}{2m-1}=0 \qquad \therefore$ 无解

② $\frac{38}{2m-1}=2 \qquad \therefore m=10$

$\therefore$ 综上: $m=10$

(10) $\begin{cases} 3a_4=45 \\ 3a_5=39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4=15 \\ a_5=13 \end{cases} \Rightarrow d=-2$

$\therefore a_6=11. \quad a_{11}=1$

$\therefore a_3+a_6+a_9=3a_6=33$

$a_8+a_{11}+a_{14}=3a_{11}=3$

例2：等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，且$a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0$ $(n\geq 2)$

$a_1=\frac{1}{2}$.

(1) 求证：$\{\frac{1}{S_n}\}$为等差数列

(2) 求a_n表达式

证：(1) $S_n-S_{n-1}+2S_n\cdot S_{n-1}=0$

$\therefore S_n-S_{n-1}=-2S_n\cdot S_{n-1}$

$\therefore \frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}=-2$

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$ $\therefore\{\frac{1}{S_n}\}$为等差数列（首相为2，$d=2$）

(2) $\frac{1}{S_n}=2+(n-1)\times 2=2n$

$\therefore S_n=\frac{1}{2n}$

$\therefore a_1=\frac{1}{2}$

$n\geq 2$时：$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}=a_n$

$\therefore a_n=\frac{-1}{2n(n-1)}$

$$\therefore a_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & (n=1)\\ -\frac{1}{2n(n-1)} & (n\geq 2)\end{cases}$$

三、等差数列前n项和最值问题

例3：等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=20$，$S_{10}=S_{15}$，求n为何值时，S_n最大，并求它的最大值

解：$S_{10}=S_{15}$

$\therefore 10\times 20+\frac{10\times 9}{2}d=15\times 20+\frac{15\times 10}{2}d$

$\therefore d=-\frac{5}{3}$

$a_n=20-\frac{5}{3}(n-1)=\frac{65}{3}-\frac{5n}{3}\leq 0$

$\therefore n\geq 13$ $a_{13}=0$

$\therefore S_{13} = \frac{1}{2}\times(20+0)\times 13 = 130$

练习:

1、等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n. $a_3=12$, $S_{12}>0$, $S_{13}<0$

(1) 求公差d范围

(2) $S_1, S_2, \cdots S_{12}$中哪个值最大

解:(1) $a_1 = 12-2d$

$$\begin{cases} S_{13} = 13(12-2d)+\frac{13\times12}{2}d<0 \\ S_{12} = 12(12-2d)+\frac{12\times11}{2}d>0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{24}{7}<d<-3$$

(2) $S_n = \frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ $S_{13}=13a_7<0$ $\therefore a_7<0$

$= \frac{d}{2}n^2+(12-\frac{5d}{2})n$ $S_{12}=6(a_6+a_7)>0$ $\therefore a_6>0$

$2S_n = dn^2+(24-5d)n$ $\therefore S_6$最大

$\therefore$当$n=-\frac{24-5d}{2d}$时,最小. $n=\frac{5}{2}-\frac{24}{5d}$ $\therefore \frac{39}{10}<n<\frac{41}{10}$

$\therefore n=4$时最大. 即S_4最大

1. $\{a_n\}$等差 $a_3a_7=-16$, $a_4+a_6=0$, 求S_n

解: $a_4+a_6=2a_5=0$, $\therefore a_5=0$

$\therefore (a_5-2d)(a_5+2d)=-16$ $\therefore d=\pm2$

$\therefore$当$d=2$时, $a_1=-8$ 当$d=-2$时, $a_1=8$

$\therefore$ ① $d=2$时, $S_n=-8n+n(n-1)=n^2-9n$

② $d=-2$时, $S_n=8n-n(n-1)=-n^2+9n$

2. $\{\log_2(a_n-1)\}$ $(n\in N^+)$为等差, $a_1=3$. $a_3=9$. 求a_n

解: 设$b_n=\log_2(a_n-1)$

$\therefore b_1=\log_2 2=1$. $b_3=\log_2 8=3$

$\therefore d=1$ $\therefore b_n = 1+(n-1)=n=\log_2(a_n-1)$

$\therefore a_n = 2^n+1$

3. 数列$\{a_n\}$前n项和为S_n, $a_1=3$ 点(S_n, S_{n+1})在直线$y=\frac{n+1}{n}x$
$+n+1$ $(n\in N^+)$

(1) 求证: $\{\frac{S_n}{n}\}$为等差

(2) 求a_n

(1) 证: $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{\frac{n+1}{n}S_n+n+1}{n+1}-\frac{S_n}{n}$ 直线除n+1

$=\frac{n^2+n}{n(n+1)}=1$

$\therefore \{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列

(2) 设$b_n=\frac{S_n}{n}$ $\therefore b_1=\frac{S_1}{1}=3$

$\therefore b_n=\frac{S_n}{n}=3+(n-1)\times1=n+2$

$\therefore b_{n-1}=n-1+2=n+1$

$\therefore b_n-b_{n-1}=\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=n+2-(n+1)=1$

$\therefore \frac{(n-1)S_n}{n(n-1)}-\frac{nS_{n-1}}{n(n-1)}=1$

$\therefore n(S_n-S_{n-1})-S_n=n(n-1)$

$\therefore a_n=\frac{S_n}{n}+(n-1)$

$\therefore a_n=2n+1$

4. $\{a_n\}$为等差 $a_n\in N^+$ $S_n=\frac{(a_n+2)^2}{8}$, 若$b_n=\frac{1}{2}a_n-30$, 求$\{b_n\}$ n项和的最小值

解: $S_1=a_1=\frac{(a_1+2)^2}{8}$ $\therefore a_1=2$ $S_2=a_1+a_2=\frac{(a_2+2)^2}{8}$

$\therefore a_2=6$ $\therefore d=4$

$\therefore a_n=2+4(n-1)=4n-2$ $\{b_n\}$为等差数列 $d=2$

$\therefore b_n=\frac{1}{2}(4n-2)-30=2n-31$ $b_1=-29$

$\therefore T_n = n^2 - 30n \quad (n \in N^+)$

$\therefore T_n$ 最小值为 $T_{15} = -225$

5 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$. $a_n = 4 - \frac{4}{a_{n-1}}$，令 $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$，求证：$\{b_n\}$ 为等差数列

证：$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{a_{n-1} - 2}$

$$= \frac{1}{4 - \frac{4}{a_{n-1}} - 2} - \frac{1}{a_{n-1} - 2}$$

$$= \frac{1}{2 - \frac{4}{a_{n-1}}} - \frac{1}{a_{n-1} - 2} = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} - 4} - \frac{2}{2a_{n-1} - 4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore d = \frac{1}{2}$

又 $\because b_1 = \frac{1}{a_1 - 2} = \frac{1}{2}$

$\therefore b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n$

$\therefore \{b_n\}$ 为等差数列

三. 等比数列

1. 定义：如果一个数列从第2项起每项与它前一项比都等于同一个非零常数，这个数列叫做等比数列，这个常数为公比。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (q\text{为常数，且 } q \neq 0)$$

注：$a_n \neq 0$

2. 等比中项

a, a_1, b 成等比数列，则 a_1 为 a 与 b 的等比中项

$$a_1^2 = a \cdot b$$

3. 等比数列通项公式

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (q \neq 0, a_n \neq 0)$

$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

4. 等比数列前n项和公式

1. $S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \\ na_1 & (q=1) \end{cases} = kq^n - k$

5 判断等比数列方法

(1) 定义法: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$

(2) 中项法 $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$

(3) 通项法: $a_n = a_1 q^{n+1} = p \cdot q^{kn+m}$

(4) 前n项和: $S_n = kq^n - k \quad (q \neq 1)$

例1: 等比数列$\{a_n\}$, 前n项和为S_n

(1) $3S_3 = a_4 - 2 \quad 3S_2 = a_3 - 2$. 求$q$ $\quad q=4$

(2) $8a_2 + a_5 = 0$ 求 $\frac{S_5}{S_2}$ $\quad -11$

(3) $a_2 = 2, a_5 = \frac{1}{4}$. 求$q$ $\quad q = \frac{1}{2}$

(4) $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等比, 求q. $\quad q = \frac{1}{3}$

(5) $a_1a_5 + 2a_2a_6 + a_3 \cdot a_7 = 100 \quad a_2a_4 - 2a_3a_5 + a_4a_6 = 36$.

$\{a_n\}$为正项等比数列. 求 a_n 和

$\begin{cases} a_3^2 + 2a_4^2 + a_5^2 = 100 \\ a_3^2 - 2a_4^2 + a_5^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow a_4 = 4$

$\therefore a_3^2 + a_5^2 = 68$

$a_3^2 + (a_3 q^2)^2 = 68$

$\therefore (1+q^4) a_3^2 = 68$

$\therefore (1+q^4) \frac{16}{q^2} = 68$

$\therefore 16q^2 + \frac{16}{q^2} = 68$

$\therefore q^2 = 4, \quad q = 2. \quad \therefore a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{4} \quad S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

5. 等比数列的性质

(1) $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

(2) $m+n = p+q. \quad a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

$(m+n=2p. \ a_m \cdot a_n = a_p^2)$

(3) $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \cdots$ 构成公比为 q^m 的等比数列

(4) $\{a_n\}. \{b_n\}$ 是等比数列. 则 $\{ka_n\}$ $\{|a_n|\}$. $\{k\, a_n \cdot b_n\}$ $\{k \frac{a_n}{b_n}\}$

公比不变 公比为 $|q|$ 公比为 $q_1 \cdot q_2$ 公比为 $\frac{q_1}{q_2}$

是等比数列

(5) 增减性

① 递增数列： $a_1 > 0. \ q > 1.$ 或 $a_1 < 0. \ 0 < q < 1$

② 递减数列： $a_1 > 0. \ 0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0, \ q > 1$

③ 摆动数列： $q < 0$

④ 常数列： $q = 1$

(6) $a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \ a_{m+1} + \cdots + a_{2m}, \ a_{2m+1} + \cdots + a_{3m}$ 是公比为 q^m 的等比数量

(7) $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_m, \ a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_{2m}, \cdots$ 是公比为 q^{m^2} 的等比数列

例2. $\{a_n\}$ 为等比数列

(1) $a_1=5$ $a_9a_{10}=100$，求 a_{18}

(2) $a_4=3$，求 $a_1a_2\cdots a_7$

(3) $a_2=-2$，$a_5=54$，求 a_8

(4) $q=2$，$a_1a_2\cdots a_{30}=2^{60}$，求 $a_3a_5\cdots a_{30}$

(5) $a_1+a_2=3$，$a_2+a_3=6$，求 a_7

(6) $a_1=1$，$a_{10}=3$，求 $a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$

(7) 正项等比数列 $\{a_n\}$，若 $S_n=2$，$S_{3n}=14$，求 S_{4n}

(8) $a_5+a_6=2$，$a_{15}+a_{16}=6$，求 $a_{25}+a_{26}$

解：(1) $a_9=a_1q^8$ $a_{10}=a_1q^9$

∴ $a_1^2\cdot q^8\cdot q^9=100$ ∴ $q^{17}=4$

∴ $a_{18}=a_1\cdot q^{17}=5\times4=20$

(2) $a_1a_7=a_2a_6=a_3a_5=a_4^2$

∴ 原式 $=a_4^2\cdot a_4^2\cdot a_4^2\cdot a_4$

$=a_4^7=3^7=2187$

(3) $a_5=a_2\cdot q^3=-2q^3=54$

∴ $q^3=-27$

∴ $a_8=a_5\cdot q^3=54\times(-27)=-1458$

(4) $a_1a_2\cdots a_{30}=(a_{31}^2)^{15}=2^{60}$ ∴ $a_{31}=4$. $b_1=a_1a_4\cdots a_{28}$

∴ $a_{33}=4\times2^2=16$. $b_2=a_2\cdot a_5\cdots a_{29}$

∴ $a_3a_6\cdots a_{30}=(a_{33}^2)^5=(16^2)^5=16^{10}$ $b_3=a_3\cdot a_6\cdots a_{30}$

$b_2^3=2^{60}$ ∴ $b_2=2^{20}$ $b_3=2^{20}\cdot2^{10}=2^{30}$

(5) $\begin{cases}a_1+a_2=3\\a_2+a_3=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_1q=3\\a_1q+a_1q^2=6\end{cases}\Rightarrow q=2$

$a_3-a_1=3$. ∴ $4a_1-a_1=3$. ∴ $a_1=1$

$\therefore a_7 = a_1 \cdot q^6 = 2^6 = 64$

(6) 原式 $= (a_{11}^2)^4 = a_{11}^8$

$= (a_1 \cdot a_{10})^8 = 3^8$

(7) $\frac{S_{3n}}{S_n} = 7 = \frac{1-q^{3n}}{1-q^n} = q^{2n}+q^n+1$ $\therefore q^n = 2$ 或 (-3) (舍) $\therefore q^n = 2$

$S_{4n} = \frac{a_1(1-q^{4n})}{1-q}$ $S_n = 2 = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\therefore \frac{a_1}{1-q} = -2$

$= -2 \times (1-16) = 30$

(8) $a_{15} + a_{16} = a_5 \cdot q^{10} + a_6 \cdot q^{10} = 6$

$\therefore q^{10} = 3$

$a_{25} + a_{26} = q^{10}(a_{15} + a_{16}) = 3 \times 6 = 18$

例3. 在1和100之间插入n个正数，使这$(n+2)$个数构成等比数列，求这n个数之积

$a_1 = 1$. $a_{n+2} = 100$

$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n+2} = (a_1 a_{n+2})^{\frac{n}{2}} = 100^{\frac{n}{2}} = 10^n$，n为偶数

n为奇数，$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n+2} = 100^{\frac{n-1}{2}} \cdot 10 = 10^n$

$\therefore a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n+2} = 10^n$

7. 等比数列前n项和性质

(1) $S_m^{\neq 0}$，$S_{2m-m}^{\neq 0}$，$S_{3m-2m}^{\neq 0}$ …… 构成等比数列

(不是所有等比数列都符合)

(2) 项数为2n项时，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$

(3) $S_{m+n} = S_m + q^m \cdot S_n$ $(m, n \in N^+)$

证：$S_{m+n} = S_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n}$

$= S_m + q^m(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

$= S_m + q^m S_n$

例3：等比数列$\{a_n\}$前n项和S_n

(1) $S_{10}=2$, $S_{20}=6$, 求$a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{50}$

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2$. $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{30}=12$. 求$a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{60}$

(3) $S_n=2^n-1$, 求$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

(4) 项数为偶数, $a_1=1$, $S_奇=85$, $S_偶=170$. 求q和项数

(5) $a_5-a_4=108$. $a_2-a_1=4$. 求S_5

解：(1) $\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2 \\ a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=4 \end{cases} \Rightarrow q^{10}=2$

$a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})q^{40}$

$=2\times(q^{10})^4=2\times2^4=2^5=32$

(2) $(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})+(a_{21}+\cdots+a_{30})=12$

$\therefore 2q^{10}+2q^{20}=12$

$\therefore q^{10}+q^{20}=6$

$\therefore q^{10}=2$

$\therefore a_{41}+a_{42}+\cdots+a_{60}=12\times q^{30}=12\times2^3=96$

(3) $a_1=S_1=1$. $S_2=3$ $\therefore a_2=2$. $\therefore q=2$

$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=a_1^2(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n-2})$

等比数列b_n, $b_1=1$, $q'=4$

$\therefore T_n=\dfrac{1\times(1-4^n)}{-3}$ $\therefore a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{4^n-1}{3}$

(4) $q=\dfrac{170}{85}=2$

$S_n=255=\dfrac{1-2^n}{1-2}$ $\therefore n=8$

(5) $\begin{cases} a_1q^4 - a_1q^3 = 108 \\ a_1q - a_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow q^3 = 27$. $\therefore q=3$. $\therefore a_1 = 2$

$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{-2} = \frac{2\times(1-3^5)}{-2} = 242$

例4. $\{a_n\}$ 为等比，$q>1$. $4\sqrt{2}$ 是 a_1 和 a_4 的等比中项，a_2 与 a_3 等差中项为6. $b_n = \log_2 a_n$

(1) 求 a_n (2) 求数列 $\{a_nb_n\}$ 前n项和

解: (1) $a_1a_4 = a_1^2q^3 = 32$ $a_2+a_3 = a_1q(1+q) = 12$

$\therefore \frac{q}{(1+q)^2} = \frac{2}{9}$ $\therefore q=2$ $\therefore a_1 = 2$. $\therefore a_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$

(2) $a_nb_n = 2^n \log_2 2^n = 2^n \cdot n$

$S_n = 2^1 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n$ ①

$2S_n = 2^2 + 2\times 2^3 + 3\times 2^4 + \cdots + n\cdot 2^{n+1}$ ②

①-② 得:

$-S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + n\cdot 2^{n+1}$

例5. $\{a_n\}$ 为等比，$a_1 = 4$. S_3. S_2. S_4 成等差

(1) 求 a_n. (2) $b_n = \log_2|a_n|$. 求 $\{\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\}$ 前n项和

解: (1) $2S_2 = S_3 + S_4$

$2\cdot \frac{4(1-q^2)}{1-q} = \frac{4(1-q^3)}{1-q} + \frac{4(1-q^4)}{1-q}$

$\therefore 8(1-q^2) = 4(1-q^3) + 4(1-q^4)$

$\therefore 2-2q^2 = 2-q^3-q^4$

$\therefore -2q^2 = -q^3-q^4$ $\therefore -2 = -q-q^2$ $\therefore q = -2$ 或 1

$\therefore a_n = \begin{cases} 4 & \text{——} \quad \text{不合题意舍} \\ 4\cdot(-2)^{n-1} = (-2)^{n+1} & (q=-2) \end{cases} \quad \therefore a_n = (-2)^{n+1}$

(2) $b_n = \log_2 |(-2)^{n+1}| = n+1$

$\therefore \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$\therefore T_n = \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4}$

例6. 求 $S_n = 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ $(x\neq 0)$

解: (1) 当 $x=1$ 时, $S_n = n^2$

(2) 当 $x\neq 1$ 时, 且 $x\neq 0$ 时

$S_n = 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$ ①

$xS_n = x+3x^2+5x^3+7x^4+\cdots+(2n-1)x^n$ ②

①-② 得:

$(1-x)S_n = 1+2x+2x^2+2x^3+\cdots+(2n-1)x^{n-1}$

$= 1-(2n-1)x^{n-1} + \frac{2x(1-x^{n-1})}{1-x}$

$= 1-(2n-1)x^{n-1} + \frac{2x-2x^n}{1-x}$

$\therefore S_n = \frac{1-(2n-1)x^{n-1} + \frac{2x-2x^n}{1-x}}{1-x}$

例7：数列$\{a_n\}$前n项和$S_n=2a_n-2^n$ ①

(1) 求 a_3. a_4

(2) 证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$为等比数列

(3) 求 a_n

解：(1) $a_1=2a_1-2$ $\therefore a_1=2$

$S_2=2a_2-4=2+a_2$ $\therefore a_2=6$

$S_3=2a_3-8=8+a_3$ $\therefore a_3=16$

$S_4=2a_4-16=24+a_4$ $\therefore a_4=40$

(2) $S_{n+1}=2a_{n+1}-2^{n+1}$ $S_n=2a_n-2^n$

$\therefore a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-2^{n+1}+2^n$

$\therefore a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}-2^n=2^n$

$\therefore \{a_{n+1}-2a_n\}$为等比数列

(2) $a_1=2$

$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2^{n-1}$ ②

① - ② 得：

$a_n=2a_n-2^n-2a_{n-1}+2^{n-1}$

$a_n=2a_{n-1}+2^{n-1}$ ③

$a_{n+1}=2a_n+2^n$ ④

$\frac{④}{③}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{a_n-2a_{n-1}}=2$

$\therefore \begin{cases} a_2-2a_1=2 \\ \{a_n-2a_{n-1}\}是以2为首相，以2为公比的等比数列 \end{cases}$

(3) $a_{n+1}-2a_n=2^n$

同除 2^{n+1} 得:

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$

$\therefore b_n$ 为等差数列. $b_1=\frac{a_1}{2}=1$

$\therefore b_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}=\frac{a_n}{2^n}$

$\therefore a_n=2^n\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$=(n+1)2^{n-1}$

根据递推公式求通项

一. 累加法

$a_{n+1}=a_n+f(n)$

(且 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ 可求)

例: (1) $\{a_n\}$ $a_1=1$. $a_{n+1}=a_n+2$ 求 a_n

解: $a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=2$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=2$

$n\geq 2$时. $a_n-a_1=2(n-1)$

$\therefore a_n=2(n-1)+1=2n-1$

检验: $a_1=1$ 符合

$\therefore a_n=2n-1$

(2) $\{a_n\}$ $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2^n$, 求 a_n

解: $a_2-a_1=2^n$

$a_3-a_2=2^n$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=2^n$

$n\geq 2$ 时, $a_n-a_1=(n-1)2^n$

$\therefore a_n=2^n(n-1)+1$

检 $a_1=1$ 符合 $\therefore a_n=2^n(n-1)+1$

(3) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n\cdot 2^n$, 求 a_n

解: $a_2-a_1=1\times 2^1$ $a_n=(n-2)\cdot 2^n+3$

$a_3-a_2=2\times 2^2$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$ $a_n=$

$\therefore n\geq 2$ 时, $-a_1-a_n=$

$\therefore a_n=n(n-1)\cdot 2+1$

检 $a_1=1$ 符合. $\therefore a_n=n(n-1)\cdot 2^n+1$

(4) $a_1=2$, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, 求 a_n

解: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$

$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\therefore a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$

$\therefore a_n = 3-\frac{1}{n}$

检：$a_1=2$ 符合. $\therefore a_n = 3-\frac{1}{n}$

二. 累乘法

$a_{n+1} = f(n)\cdot a_n$ （$f(1)\cdot f(2)\cdot \cdots \cdot f(n)$ 可求）

例 (1) $a_1=1$, $(n+1)a_{n+1} = n a_n$, 求 a_n

解: $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

$\therefore a_2 = \frac{1}{2} a_1$

$a_3 = \frac{2}{3} a_2$

$a_4 = \frac{3}{4} a_3$

$\vdots$

$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{1}{n} a_1 = \frac{1}{n}$

检：$a_1=1$. 符合. $\therefore a_n=\frac{1}{n}$

(2) $a_1=\frac{1}{3}$. $a_n = \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-1}$ $(n\geq 2)$ 求 a_n

解: $a_2 = \frac{4-3}{4+1} = \frac{1}{5} a_1$

$a_3 = \frac{6-3}{6+1} = \frac{3}{7} a_2$

$a_4 = \frac{8-3}{8+1} = \frac{5}{9} a_3$

$a_5 = \frac{10-3}{10+1} = \frac{7}{11} a_4$

$\vdots$

$a_n = \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{1}{6n+3}$ $(n\geq 2)$

(3) $a_1=1$. $a_{n+1} = 3^n\cdot a_n$. 求 a_n

解: $a_2=3a_1$

$a_3=3^2a_2$

$a_4=3^3a_3$

$\vdots$

$a_{n+1}=3^na_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n(1-3^n)}{4-3}$ $a_1=3^{\frac{n^2+n}{2}}$

检: $a_1=3$ 不符合 $\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 3^{\frac{n^2+n}{2}} & (n\geq 2)\end{cases}$

(4) $a_1=10$. $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+5}=\frac{2a_n}{a_n+5}$, 求 a_n

解: $\frac{a_2}{a_2+5}=\frac{2a_1}{a_1+5}$ 设 $b_n=\frac{a_n}{a_n+5}$ $\therefore b_{n+1}=2b_n$, $b_1=\frac{1}{2}$

$\frac{a_3}{a_3+5}=\frac{2a_2}{a_2+5}$

$\frac{a_4}{a_4+5}=\frac{2a_3}{a_3+5}$

$\vdots$

$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+5}=\frac{2a_n}{a_n+5}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+5}=\frac{2a_1}{a_1+5}\cdot 2^{n-1}=\frac{4}{3}\cdot 2^{n-1}$

$\therefore \frac{a_n}{a_n+5}=\frac{4}{3}\cdot 2^{n-2}=\frac{4}{3}\times\frac{2^n}{4}=\frac{2^n}{3}$

$\therefore a_n=\frac{5\times 2^n}{3-2^n}$

△ 三. 混合数制

例: 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, $a_n+S_n=2$. 求 a_n

解: $a_1=1$

$n\geq 2$时, $S_n=2-a_n$

$S_{n-1}=2-a_{n-1}$

$\therefore a_n=a_{n-1}-a_n$. $\therefore a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$

$\therefore a_n=1\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$

练习

1. $S_n=2a_n-2$. 求a_n

解: $S_n=2a_n-2 \Rightarrow a_n=2a_n-2a_{n-1} \Rightarrow a_n=2a_{n-1}$

$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$

$n=1$时, $a_1=2a_1-2$. $\therefore a_1=2$

$n\geq 2$时, $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$ $\therefore a_n=2^n$

2. $S_n=(n+1)a_n+n^2+n$, 求a_n

解: $a_1=2a_1+2$. $\therefore a_1=-2$

$n\geq 2$ $S_n=(n+1)a_n+n^2+n \Rightarrow a_n=na_n+a_n-na_{n-1}+2n$

$S_{n-1}=na_{n-1}+(n-1)^2+(n-1) \Rightarrow a_n=a_{n-1}-2$ $\therefore d=-2$.

$\therefore a_n=-2-2(n-1)=-2n$

3. 正项数列$\{a_n\}$前n项和为S_n. $S_1>1$. $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$ 求a_n

解: $\begin{cases} 6S_n=a_n^2+3a_n+2 \\ 6S_{n-1}=a_{n-1}^2+3a_{n-1}+2 \end{cases}$ $n\geq 2$ $\Rightarrow 6a_n=(a_n^2-a_{n-1}^2)+3a_n-3a_{n-1}$

$\therefore 3(a_n+a_{n-1})=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$

$\therefore a_n=a_{n-1}+3$

$n=1$时. $6a_1=a_1^2+3a_1+2$ $\therefore a_1=2$

$n\geq 2$时，$a_n = 2+3(n-1)=3n-1$

$\therefore a_n = 3n-1$

四、构造数列

△1. $a_{n+1} = pa_n + q$

例1. 数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$，求a_n

解：$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

设 $b_n = a_n+1$

$\therefore b_{n+1}=3b_n$，$b_1 = a_1+1=2$

$\therefore b_n = 2\times 3^{n-1} = a_n+1$

$\therefore a_n = 2\times 3^{n-1}-1$

练习：

(1) $a_1=2$，$n\geq 2$时，$a_n = \frac{3-a_{n-1}}{2}$ 求a_n

解：(1) $2a_n = 3-a_{n-1}$

$\therefore 2(a_n-1) = -(a_{n-1}-1)$ $\therefore \frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} = -\frac{1}{2}$

设 $b_n = a_n-1$ $b_1 = a_1-1=1$

$b_n = (-\frac{1}{2})^{n-1} = a_n-1$

$\therefore a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}+1$

检验 $a_1=2$

$\therefore a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}+1$

△2. $a_{n+1} = pa_n+kn+q$

例. $a_1=1$，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+2n-1$，$(n\geq 2)$ 求a_n

解：$a_n+An+B=\frac{1}{2}[a_{n-1}+A(n-1)+B]$

$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{A}{2}n - (\frac{A}{2}+\frac{B}{2})$

$\therefore \begin{cases} -\frac{A}{2}=2 \\ -(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=6 \end{cases}$

$\therefore a_n-4n+6=\frac{1}{2}[a_{n-1}-4(n-1)+6]$

设 $b_n=a_n-4n+6$ $\quad b_1=a_1-4+6=3$

$\therefore b_n=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=$

练习：$a_1=1.\ a_n=2a_{n-1}+3n+5\ (n\geq 2)$. 求 a_n

解：$a_n+An+B=2[a_{n-1}+A(n-1)+B]$

$\therefore a_n=2a_{n-1}+An+(B-2A)$

$\therefore \begin{cases} A=3 \\ B-2A=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=11 \end{cases}$

设 $b_n=a_n+3n+11$ $\quad b_1=1+3+11=15$

$\therefore b_n=2b_{n-1}$ $\quad \therefore b_n=15\times 2^{n-1}=a_n+3n+11$

$\therefore a_n=15\times 2^{n-1}-3n-11$

△3. $a_{n+1}=pa_n+q^n$

例：$a_1=1.\ a_{n+1}=2a_n+2^{n-1}$，求 a_n

解：$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^{n+1}}+\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{4}$

设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$

$\therefore b_{n+1}=b_n+\frac{1}{4}$ $\quad b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)=\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}=\frac{a_n}{2^n}$

$\therefore a_n=\frac{n}{4}\cdot 2^n+\frac{1}{4}\times 2^n=(\frac{n}{4}+\frac{1}{4})\cdot 2^n=(n+1)2^{n-2}$

检验：$a_1=1$. 符合. $\quad \therefore a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$

练习. $a_1=\frac{5}{6}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$ ，求 a_n

解: $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2^{n+1}}$

$2^{n+1}\cdot a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3}a_n+1$

$2^{n+1}\cdot a_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot 2^n\cdot a_n+1$

设 $b_n=2^n\cdot a_n$

∴ $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+1$

∴ $b_{n+1}-3=\frac{2}{3}(b_n-3)$

设 $c_n=b_n-3$. $c_1=b_1-3=2a_n-3=-\frac{4}{3}$

∴ $c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n$

∴ $c_n=-\frac{4}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}=-2\times(\frac{2}{3})^n=b_n-3$

∴ $b_n=3-2\times(\frac{2}{3})^n=2^n\cdot a_n$

∴ $a_n=\frac{3-\frac{2^{n+1}}{3^n}}{2^n}=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^n}$

检验: $a_1=\frac{5}{6}$ 符合

∴ $a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^n}$

△4. $a_{n+1}=pa_n^k$ 取对数

例. $a_1=3$. $a_{n+1}=a_n^2$. 求 a_n

解: 各项均为正. 两边取对数

$\lg a_{n+1}=\lg a_n^2$

∴ $\lg a_{n+1}=2\lg a_n$

设 $\lg a_n=b_n$. ∴ $b_{n+1}=2b_n$ $b_1=\lg a_1=\lg 3$

$b_n=(\lg 3)\times 2^{n-1}=\lg 3^{2^{n-2}}=\lg a_n$

$\therefore a_n = 3^{2^{n-1}}$

检验: $a_1=3$ 符合

$a_n = 3^{2^{n-1}}$

△5. $a_{n+1} = \frac{pa_n}{ka_n+q}$ 取倒数

例. $a_1=2$. $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_1+3}$. 求 a_n

解: $\frac{1}{a_{n+1}} = 1+3\times\frac{1}{a_n}$

设 $b_n = \frac{1}{a_n}$ $b_{n+1} = 3b_n+1$ $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$

$b_{n+1}+\frac{1}{2} = 3(b_n+\frac{1}{2})$

设 $C_n = 1\times 3^{n-1} = 3^{n-1} = b_n+\frac{1}{2}$

$\therefore b_n = 3^{n-1}-\frac{1}{2} = \frac{1}{a_n}$

$\therefore a_n = \frac{1}{3^{n-1}-\frac{1}{2}}$

练习. $a_1=\frac{3}{5}$. $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n+1}$, 求 a_n

解: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{a_n}$

设 $b_n = \frac{1}{a_n}$; $b_{n+1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}b_n$. $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{5}{3}$

$\therefore b_{n+1}-1 = \frac{1}{3}(b_n-1)$

设 $C_n = b_n-1$. $\therefore C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n$ $C_1 = b_1-1 = \frac{2}{3}$

$\therefore C_n = \frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2}{3^n} = b_n-1$

$\therefore b_n = \frac{2}{3^n}+1 = \frac{1}{a_n}$

$\therefore a_n = \frac{3^n}{3^n+2}$

检: $a_1=\frac{3}{5}$ 符合 $\therefore a_n = \frac{3^n}{3^n+2}$

△6. $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，构造 $a_{n+2}-xa_{n+1}=y(a_{n+1}-xa_n)$

例：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$，求 a_n

解：$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

设 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $\therefore b_{n+1}=3b_n$ $b_1=a_2-a_1=1$

$\therefore b_n=3^{n-1}$，$\therefore a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$，叠加 $a_n=\dfrac{1+3^{n-1}}{2}$

数列求和

一、公式法

1、等差求和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$$

2、等比求和

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1) \end{cases}$$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

例：求1，3+5，7+9+11，13+15+17+19，…… 求前n项和

解：$a_n=n^3$ 第n项数之前共有 $(1+2+3+4+\cdots+n-1)$ 即 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个数

$\therefore S_n=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 第n项第1项为 $n(n-1)+1$，共n个数，

最后项为 $n(n-1)+1+2n-2$

二、分组求和

$C_n=a_n+b_n$ （a_n，b_n 前n项和可求）

例1. 求 $1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，…… 前n项和

解: $S_n = (1+2+3+\cdots+n)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

$= \frac{(1+n)n}{2} + \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$

2. 求 $1\times4+2\times5+3\times6+\cdots+n(n+3)$

解: $a_n = n(n+3) = n^2+3n$

$S_n = (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\times\frac{n(1+n)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+9n(1+n)}{6} = \frac{2n(n+1)(n+5)}{6} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

3. 求 0.9, 0.99, … 前n项和

解: $a_n = 1-\frac{1}{10^n}$

$S_n = n-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n})$

$= n - \frac{\frac{1}{10}\times(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}}$

$= n - \frac{1}{9}(1-\frac{1}{10^n})$

4. 求 1×4, 3×7, 5×10, … 前n项和

解: $a_n = (2n-1)(3n+1) = 6n^2-n-1$

$S_n = 6\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)-n$

$= n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} - n$

$= \frac{4n^3+5n^2-n}{2}$

三. 倍差法.

$C_n = a_n \cdot b_n$ （a_n; b_n 其中一个为等差数列，另一个为等比数列）

例. 求 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

解: $C_n = \frac{1}{2^n}\times(2n-1)$

$S_n = 1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{8}+\cdots+(2n-1)\times\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2}S_n = 1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+\cdots+(2n-3)\times\frac{1}{2^n}+(2n-1)\frac{1}{2^{n+1}}$

$\therefore \frac{1}{2}S_n = [1\times\frac{1}{2}-(2n-1)\times\frac{1}{2^{n+1}}]+(2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+\cdots+2\times\frac{1}{2^n})$

$= (\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}})+2\times\frac{\frac{1}{4}\times[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}$

$\therefore S_n = 3-\frac{2n+3}{2^n}$

2. $a_n=(2n-5)\cdot 2^{n-3}$ $(n\in N^*)$，求 S_n

解: $S_n = (-3)\times2^{-2}+(-1)\times2^{-1}+1\times2^0+\cdots+(2n-7)\times2^{n-4}+(2n-5)2^{n-3}$

$2S_n = (-3)\times2^{-1}+(-1)\times2^0+\cdots+(2n-7)\times2^{n-3}+(2n-5)\times2^{n-2}$

$\therefore S_n = (-3)\times2^{-2}-(2n-5)\times2^{n-2}+(2\times2^{-1}+2\times2^0+\cdots+2\times2^{n-3})$

$= -\frac{3}{4}-(2n-5)\times2^{n-2}+2\times\frac{1}{2}+2\times1+2\times\frac{2\times(1-2)^{n-3}}{1-2}$

$= -\frac{3}{4}-n\cdot2^{n-2}+5\times2^{n-3}+3+4\times2^{n-3}-1$

$= \frac{5}{4}-n\cdot2^{n-2}+9\times2^{n-3} = \frac{5}{4}+(\frac{9}{2}-n)2^{n-2}$

$\frac{7}{4}-(7-2n)2^{n-2}$

3. 正项等比数列$\{a_n\}$，$a_1=\frac{1}{2}$，$2^{10}\cdot S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$.

(1) 求 a_n　　(2) 求 $b_n = na_n$ 前n项和

解: (1) $2^{10}(S_{20}+q^{20}\cdot S_{10})-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$

$\therefore 2^{10}S_{20}+2^{10}q^{20}S_{10}-2^{10}S_{20}-S_{20}+S_{10}=0$

$\therefore 2^{10}q^{20}-q^{10}=0$

$\therefore 2^{10}\cdot q^{10}=1$. $\therefore q=\frac{1}{2}$. $\therefore a_n=\frac{1}{2^n}$

(2) $b_n=na_n$

$\therefore S_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^n}$

$\therefore \frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}-n\cdot\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{n}{2^4}+\frac{4[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{n+1}{2^n}$

$\therefore S_n=2-\frac{2n+2}{2^n}$

四、列相項消

例：求和

(1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$

(3) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ 通項为：$\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$

$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$

$=2\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\frac{2n}{n+1}$

(4) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$=\sqrt{n+1}-1$

(5) $\frac{2^2}{1\times3}+\frac{4^2}{3\times5}+\cdots+\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$

常见形式

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

五、讨论n的奇偶

例 $a_n=\begin{cases} b_n-5 & (n\text{为奇数}) \\ 4^n & (n\text{为偶数}) \end{cases}$，求 S_n

解：① 当n为奇数：$a_1=1$

$S_{奇}=\frac{(1+b_n-5)\cdot\frac{n+1}{2}}{2}$

$S_{偶}=\frac{16(1-16^{\frac{n-1}{2}})}{1-16}$

$\therefore S_n=S_{奇}+S_{偶}=\frac{(n+1)(3n-2)}{2}+\frac{16(4^{n-1}-1)}{15}$

② 当n为偶数

$S_{奇}=\frac{(1+b_n+1)\cdot\frac{n}{2}}{2}$

$S_{偶}=\frac{16(1-16^{\frac{n}{2}})}{2}$

$\therefore S_n=S_{奇}+S_{偶}=\frac{n(3n-5)}{3}+8(1-4^n)$

练习：

求 $(-2)+7+(-12)+17+(-22)+27+\cdots+(-1)^n(5n-3)$

解：① 当n为奇数时

$S_n=\frac{n-1}{2}\times5-(5n-3)=\frac{5n}{2}-\frac{5}{2}-5n+3=-\frac{5n}{2}+\frac{1}{2}$

② 当n为偶数时

$S_n=\frac{n}{2}\cdot5=\frac{5n}{2}$

空间几何学

一、多面体和旋转体

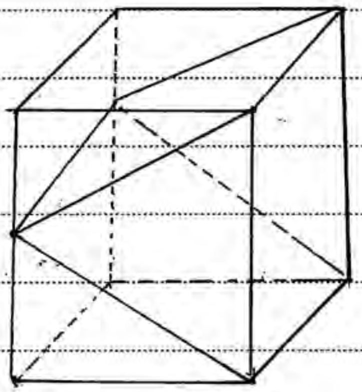
1、多面体：由若干个平面多边形围成的几何体

2、旋转体：由一个平面图形绕它所在平面内一条直线旋转所形成的封闭几何体。

二、棱柱

1、定义

① 有两个面互相平行 ② 其余各面都是四边形 并且 ③ 每个相邻两个四边形的公共边互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱　　三个条件　缺一不可



ABCD-A'B'C'D' 为棱柱

右面为四边形 BB'C'C 和 AA'D

▱ ABC'D' 为对角面

AC', BD' AC' B'D 为体对角线

相互平行的两个面为底面

除底面以外其他各面为侧面

相邻各面的公共边为棱，相邻各侧面的公共边的侧棱

不相邻侧棱所确定的截面四边形为对角面

侧棱与底面交点为顶点

不在同一平面上的两个顶点的连线为体对角线

两底面间的距离为棱柱的高

2. 性质

(1) 两底面平行且全等

(2) 侧面，对角面为平行四边形

(3) 侧棱平行且相等

(4) 平行于底面的截面与底面全等

3. 分类

(1) 按底面多边形边数分：三棱柱，四棱柱

(2) 按侧棱与底面位置关系分

棱柱：{斜棱柱：侧棱不垂直于底面的棱柱
直棱柱：侧棱垂直于底面的棱柱 {正棱柱：底面是正多边
其他直棱柱 形直棱柱

4. 特殊的四棱柱

四棱柱 $\xrightarrow[\text{行四边形}]{\text{底面是平}}$ 平行六面体 $\xrightarrow[\text{于底面}]{\text{侧棱垂直}}$ 直平行六面体

$\xrightarrow{\text{底面为矩形}}$ 長方体 $\xrightarrow{\text{底面是正方形}}$ 正四棱柱 $\xrightarrow[\text{边長相等}]{\text{侧棱与底面}}$ 正方体

三. 棱锥

1. 定义：

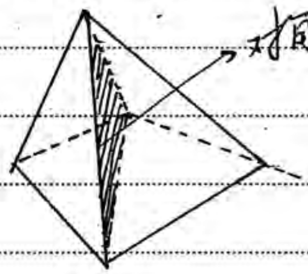
有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共点的三角形，由这些面所围成的几何体是棱锥。

有公共頂点的各个三角形为侧面

相邻侧面的公共边为侧棱

多边形为底面

各侧面公共点为頂点



对角面

不相邻侧棱所确定的截面为对角面

頂点到底面的距离为棱锥的高

2. 正棱锥和正四面体

(1) 定义：①底面是正多边形 ② 顶点在底面的射影是底面中心的棱锥是正棱锥

(2) 侧棱与底面边长相等的正三棱锥是正四面体

3. 正棱锥的性质

各侧面相等

各侧面都是全等的等腰三角形

各斜高相等

侧面的高

(2) 正棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形　正棱锥的高、侧棱和侧棱在底面上的射影组成一个直角三角形

四、棱台

1、定义

用一个平行于棱锥表面的平面去截棱锥，底面与截面的部分叫做棱台

侧面为梯形

2. 性质

(1) 两底面平行且相似

(2) 侧面为梯形

(3) 侧棱延长交于一点

五、圆锥

1、定义：

以矩形一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋体

平行于轴的边在旋转过程中所处的位置叫母线

过轴所形成的截面为轴截面．

2．性质

(1) 轴截面都是全等的矩形

(2) 母线垂直于底面，和圆柱的高相等

六．圆锥

以直角三角形一条直角边所在直线为轴，其余两边旋转形成的旋转体叫圆锥

母线共顶点、长度相等，与轴的夹角相等

七．圆台

1、定义：

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥．底面与截面之间的部分叫做圆台

2．性质

(1) 两底面是半径不相等的平行圆．

(2) 轴截面是等腰梯形

任意两条母线所确定的截面是等腰梯形

空间几何体的三视图和直观图

一、投影

1、把光由一点向外散射形成的投影叫做中心投影，投影线一定会交于一点

2、把在一束平行光照射形成的投影叫做平行投影，投影线平行

在平行投影中，投影线正对投影面时为正投影，否则为斜投影。

二、空间几何体三视图

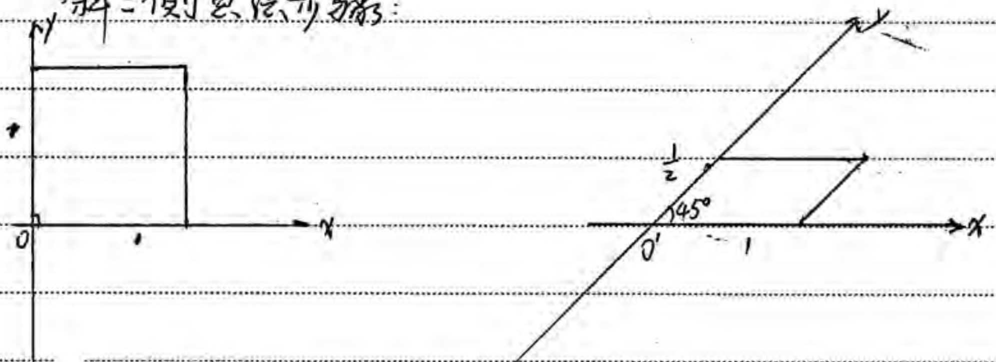
1、正视图　（主视图）

2、侧视图　（左视图）

3、俯视图

三、空间几何体的直观图

斜二侧画法步骤：



1、在已知图形中，取互相垂直的x轴，y轴交于点O，画直观图时把它们画成对应的x'轴与y'轴交于点O'，$\angle x'O'y'=45°$（有时135°）

2、已知图形中平行于x轴的线段在直观图中平行于x'轴，且保持原长不变。已知图形中平行于y轴的线段在直观图中平行于y'轴，且长度变为原长一半

结论：$\frac{S_{斜}}{S_{原}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

空间几何体的表面积和体积

一. 表面积公式

1. 棱柱、棱锥、棱台

各面面积相加

2. 圆柱圆锥圆台

(1) 圆柱：底面半径为 r，母线为 l

$S_{圆柱侧}=2\pi r\cdot l$

$S_{表}=2\pi rl+2\pi r^2$

(2) 圆锥：底面半径 r，母线为 l

$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}\times 2\pi\times l=\pi rl$

$S_{表}=\pi rl+\pi r^2$

(3) 圆台：上底面半径为 r_1，下底面半径 r_2，母线 l

$S_{圆台侧}=\pi l\cdot(r_1+r_2)$

$S_{表}=\pi l(r_1+r_2)+\pi r_1^2+\pi r_2^2$

$=\pi(r_1l+r_2l+r_1^2+r_2^2)$

3. 球体

$S_{表}=4\pi R^2$

二. 体积公式

1. 柱体

$V_{柱体}=S_{底}\cdot h$

2. 锥体

$V_{锥体}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$

3. 台体

$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S_{上}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}}+S_{下})$

4. 球体

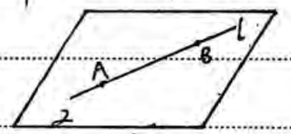
$V_{球体}=\frac{4}{3}\pi R^3$

点、直线、平面的位置关系

一、平面基本性质公理

(1)公理1: 如果一条直线上两个点在一个平面内，那么这条直线在平面内.

作用: 判断一条直线在平面内



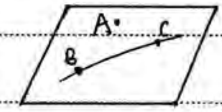
符号表示: $A\in l$, $B\in l$, 且 $A\in$面α, $B\in$面α, 则 $l\subset\alpha$

2. 公理2. 过不在同一直线上三点，有且只有一个平面

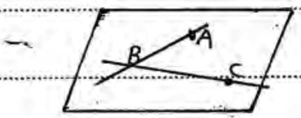
作用: 用于判断两个平面~~重合~~

符号表示: A.B.C 三点不共线，则存在唯一平面 α，使 $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\in\alpha$.

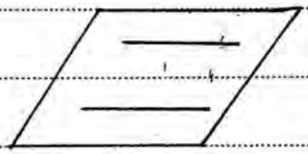
(1) 推论1: 经过一条直线和这条直线外一点有且仅有一个平面



(2) 推论2：经过两条相交直线有且仅有一个平面



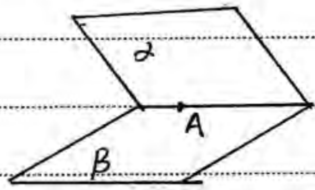
(3) 推论3：经过两条平行直线，有且仅有一个平面.



※ 3. 公理3. 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且仅有一条经过该点的公共直线

作用：证明点在直线上

符号表示：$A\in\alpha\cap\beta$，且 $\alpha\cap\beta=l$，则 A 在 l 上



问题一：证明点共线

例：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 Q.

求证：B, Q, D_1 共线

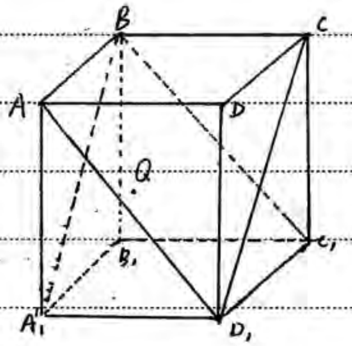
证：B, D_1 在面 ABC_1D_1 和面 A_1BCD_1 中.

Q 在面 ABC_1D_1 中

Q在面 A_1BCD_1 中

∴ B.Q.D_1在面$ABCD_1$和面A_1BCD_1交线上

∴ B.Q.D_1共线



问题2. 证明线共点

例：面α.β.γ两两相交于三条直线l_1,l_2,l_3，且l_1,l_2,l_3不平行

求证：l_1,l_2,l_3相交于一点

证：∵ l_1.l_2不平行

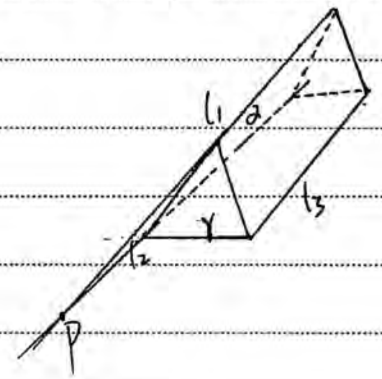
∴ l_1.l_2交于点P

∵ P在l_1上.P在l_2上

∴ P∈α. P∈γ

∴ P在α和γ交线,即l_3上

∴ l_1.l_2.l_3交于一点



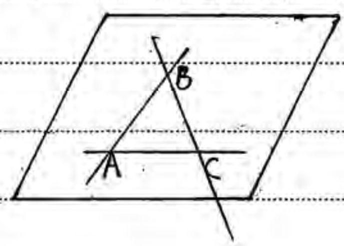
问题三 点线共面

例：直线AB.BC.CA两两相交，交点为A.B.C．证明：三条直线共面

证：∵ AB.AC交于点A

∴ AB.AC在同一平面α内

又∵ B.C在α内



∴ 三条直线共面

练习. 正方体ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中, E.F分别是AB和AA_1中点、

(1) 求证: E. C. D_1 共面

(2) 求证 CE. D_1F. DA 三条直线交于一点、

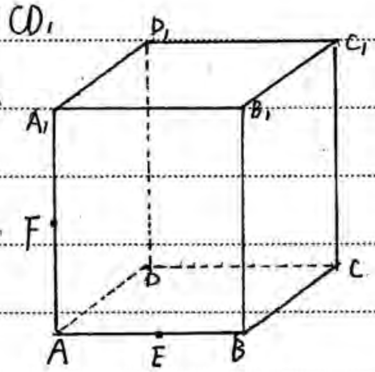
解: (1) ∵ $BC \overset{\parallel}{=} A_1D_1$ ∴ $A_1B \parallel CD_1$

∵ $EF \parallel A_1B$ ∴ $EF \parallel CD_1$

∴ EF. CD_1 在同一平面之内

∴ E. C, D_1 F 共面

(2) D_1F. CE 交于一点P



二. 空间直线与直线的位置关系

1. 异面直线定义: 不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线

2. 空间两条直线位置关系

位置关系		含义
共面	平行	同在一个平面内且无交点、
	相交	同在一个平面内且有一个公共点、
异面		

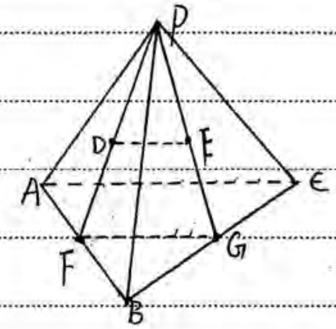
3. 平行公理

平行于同一直线的两条直线互相平行

4. 等角定理（求异面直线成角，依平移）

空间中如果两个角的两边分别对应平行，则这两个角相等或互补

例：P在$\triangle ABC$所在平面外一点，点D、E分别是$\triangle PAB$和$\triangle PBC$的重心，求证：$DE \parallel AC$



证：$\frac{PD}{DF}=\frac{2}{1}$ $\frac{PE}{EG}=\frac{2}{1}$

$\therefore DE \parallel FG$

$\therefore FG \parallel AC$

$\therefore DE \parallel AC$

三、异面直线所成的角

1. 定义：直线a、b是异面直线，经过空间任意一点O作直线$a' \parallel a$，$b' \parallel b$，把a'与b所成的锐角或直角叫做异面直线a与b所成的角

2. 范围：$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时 $a \perp b$

四、异面直线的公垂线

定义：和两条异面直线都垂直相交的直线叫做这两条异面直线的公垂线.

五、异面直线的距离

定义：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段长

例1：正方体：$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，求下列异面直线成角

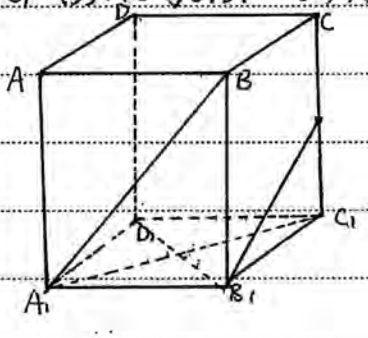
(1) AB_1与CC_1 (2) AA_1与B_1C_1 (3) A_1B与B_1D_1 (4) A_1C与B_1D_1

解：(1) $\frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{\pi}{3}$

(4) $\frac{\pi}{2}$



例2. 长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$. $AD=3$. $BB_1=2$. 求AC_1与BD成角余弦值. $\angle BEF$即为所求角

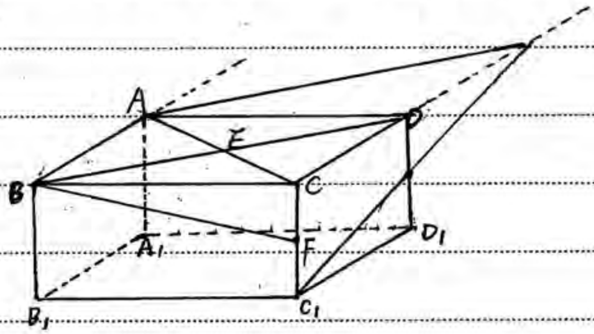
$BE=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $AC_1=\sqrt{4+10}=\sqrt{14}$

$EF=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$BF=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\because 10=\frac{10}{4}+\frac{14}{4}-2\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}\cos\angle BEF$ $\because \cos\angle BEF\geqslant 0$

$\therefore \cos\angle BEF=\frac{4\sqrt{35}}{35}$

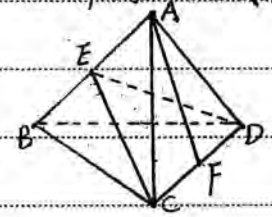


例3. 正四面体$A-BCD$中.

(1) 若E为CD中点，求AE与BC所成角

(2) 若E.F分别为CD.AD中点，求AE与BF成角

(3) E.F分别为AB、CD中点，求AF与CE成角



解：(1) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) $\cos\theta=\frac{1}{6}$

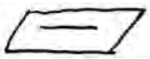
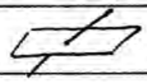
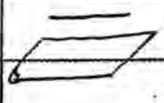
(3) $\cos\theta=\frac{2}{3}$ (如图)

直线与平面平行的判定与性质

一、直线与平面平行定义

如果一条直线和一个平面没有公共点，那么这条直线与这个平面平行，记作 $a // \alpha$

二、直线与平面位置关系

名称	含义	图示	符号	
直线在平面内	直线与平面有无数个公共点		$a \subset \alpha$	
直线与平面相交	直线与平面只有一个公共点		$a \cap \alpha = P$	$a \not\subset \alpha$
直线与平面平行	直线与平面没有公共点		$a // \alpha$ 或 $a \cap \alpha = \phi$	

三、直线与平面平行判定定理

1. 内容：如果平面外一条直线与这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行
2. 简记：线线平行 ⇒ 线面平行
3. 符号表示：$a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$ 且 $a // b$，则 $a // \alpha$

例1：已知空间四边形ABCD中，E.F分别是AB和AD的中点。求证：

证：∵ EF为AB、AD中点

∴ EF为△ABD中位线

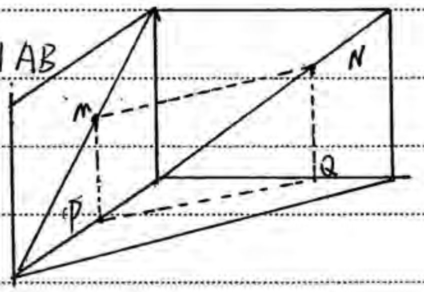
∴ EF ∥ BD

又∵ EF在面BCD外

∴ EF ∥面BCD

例2. 正方形ABCD与ABEF，M∈AC，N∈FB且AM=FN，求证：MN∥面BCE

证：MP ∥ AB，NQ ∥ AB



∴ MP ∥ NQ

∵ AM = NF

∴ CM = BN

△MCP和△BNQ为等腰直角三角形

∴ MP = NQ

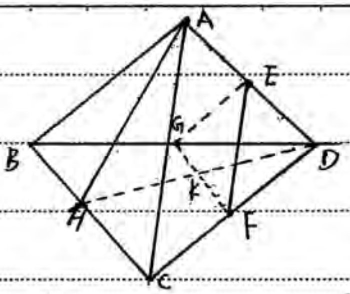
∴ 四边形MNQP为平行四边形

∴ M,N ∥ PQ

又∵ MN不在面BCE内，PQ在面BCE中

∴ MN ∥平面BCE

例3. 已知E.F.G.H.分别是中点，求证 A,A ∥面EFG



解：连接DH交GF于K，连接EK

$\because$ $GF \parallel BC$ 且 H为BC中点

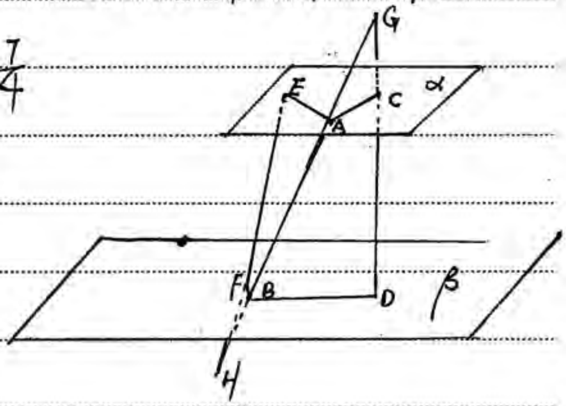
$\therefore$ K 为GF中点

△ADH中，$EK \parallel AH$

$\because$ AM不在面EFG中，EK在面EFG中

$\therefore$ $AH \parallel$ 面EFG

例4. 面$\alpha \parallel$面β，线段GH、GD、HE交α、β于点A、B、C、D、E、F．若$GA=9$，$AB=12$，$BH=16$，$S_{\triangle AEC}=72$，求$S_{\triangle BFD}$



$$\frac{AC}{BD}=\frac{9}{9+12}=\frac{3}{7} \qquad \frac{AE}{BF}=\frac{7}{4}$$

$$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}AE\cdot AC\cdot \sin\angle EAC=72$$

$$S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}BF\cdot BD\cdot \sin\angle FBD$$

$$=\frac{1}{2}BF\cdot BD\cdot \sin\angle EAC$$

$$=96$$

例5. 正方体中，E、F、M分别为D_1C_1、BC、DD_1中点

(1) 求证：$EF \parallel$面B_1BDD_1

(2) 求证：$BD_1 \parallel$面MAC

(3) O为面A_1ADD_1中点，求证 $CO \parallel$面A_1BC

解：(1) 证：取BD中点N，连接D_1N、NF

$\therefore NF=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}D_1C_1=D_1E$

又$\because NF \parallel DC$，$DE_1 \parallel DC$

$\therefore NF \parallel DE$

∴四边形D_1NFE是平行四边形

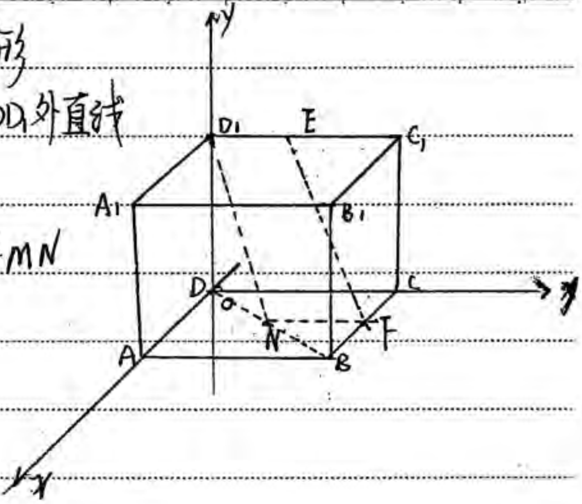
∴$D_1N \parallel EF$ 又∵EF为面B_1BDD_1外直线

∴$EF \parallel$面B_1BDD_1

(2) 连接BD交AC于N，连接MN

$\triangle BD_1D$中，$MN \parallel BD_1$

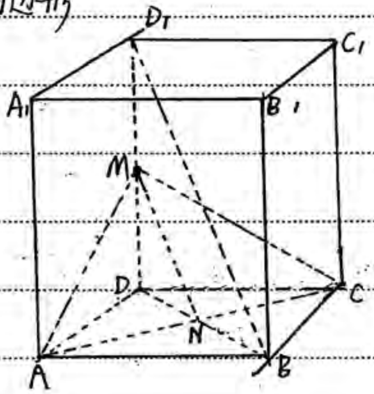
∴$BD_1 \parallel$面MAC

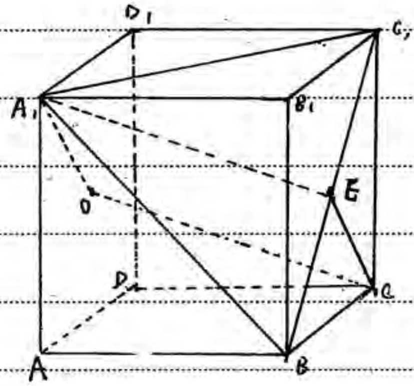


(3) 如图：四边形GEA_1O为平行四边形

∴$CO \parallel A_1E$

∴$CO \parallel$面ABC_1





四 直线与平面平行性质定理

1. 内容：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线与交线平行

2. 简记：线面平行 => 线线平行

3. 符号：$a\parallel$ 面 α，$a\subset$ 面 β 且 $\alpha\cap\beta=b$，则 $a\parallel b$

例1：平行于四面体 ABCD 一组对棱 AB、CD 的平面截此四面体得截面 MNPQ

(1) 求证：四边形 MNPQ 为平行四边形

(2) $AB=CD=a$，求证：四边形 MNPQ 周长为定值

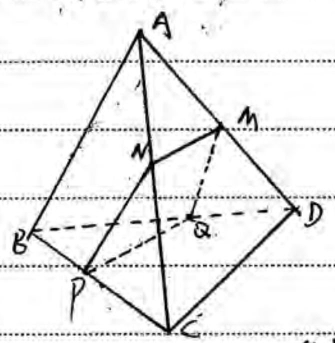
解：(1) 证：∵ $MN\parallel CD$，$PQ\parallel CD$

∴ $MN\parallel PQ$

又∵ $PN\parallel AB$，$QM\parallel AB$

∴ $PN\parallel QM$

∴ 四边形 MNPQ 为平行四边形



(2) 设 $\frac{AC}{CN}=x$，$CN=\frac{1}{x}AC$ ∴ $AN=AC-\frac{1}{x}AC=\frac{x-1}{x}AC$

∴ $\frac{BN}{AB}=\frac{CN}{AC}=\frac{1}{x}$，∴ $PN=\frac{a}{x}$

$\frac{NM}{CD}=\frac{AN}{AC}=\frac{x-1}{x}$ ∴ $NM=(1-\frac{1}{x})a$

∴ $C_{四边形}=2(PN+MN)=2(\frac{a}{x}+a-\frac{a}{x})=2a$

例2. 直线 $AB\parallel$ 面 α，$C、D\in$ 面 α，M、N 是 AC、BD 中点

求证：$MN\parallel$ 面 α

证：过 B 作 $BP\parallel AC$ 交面 α 于 P，连接 DP，取 DP 中点 Q 连接 NQ、CQ、CP

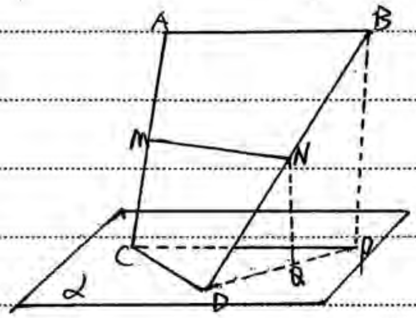
NQ $\underline{\parallel}$ MC

∴ 四边形 MCNQ 为平行四边形

∴ MN ∥CQ

又∵ MN 为面Q为直线

∴ MN ∥面α



例3. P是▱ABCD外一点，M是PC中点. 在DM上取一点G. 过G和AP作平面交面BDM于GA

求证: AP∥GH

证: 连接AC. BD交于O. 连接OM

∵ O. M 为 BD. PC中点

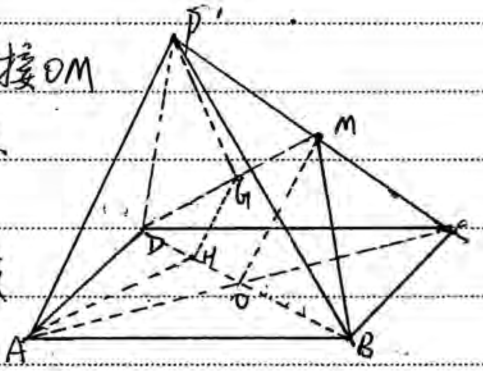
∴ OM∥AP

∵ AP 为面 BDM 外直线

∴ AP∥面BDM

∵ 面 APGH 与面BDM 相交于G.H

∴ AP ∥GH



直线与平面垂直的判定与性质

一. 直线与平面垂直的定义.

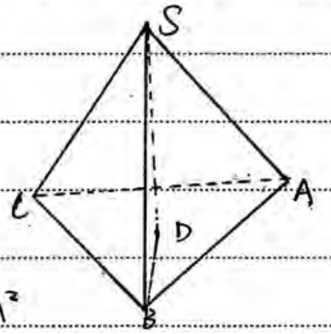
如果一条直线垂直于平面内的任意一条直线. 则称这条直线与这个直线平面垂直.

记作. $a\perp\alpha$. α与α交点为垂足. a是α的垂线. α是a的垂面

2. 简记：线线垂直 => 线面垂直
两条相交直线

3. 符号：$l\perp a$, $l\perp b$, $a\subset\alpha$, $b\subset\alpha$ 且 $a\cap b=P$ 则 $l\perp$ 面 α

例1：S是Rt△ABC所在平面外一点，则 $SA=SB=SC$，D为斜边AC中点，求证：SD⊥面ABC



证：∵ $SC=SA$，D为AC中点

∴ $SD\perp AC$

连接BD

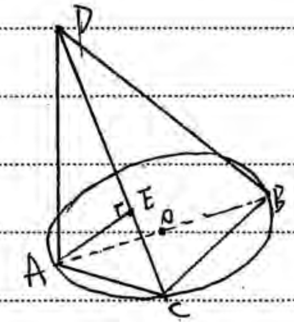
∵ $BD=AD$，$SB=SA$，且 $SD^2+DA^2=SA^2$

∴ $SD^2+BD^2=SB^2$

∴ $SD\perp BD$

∴ SD⊥面ABC

例2. PA垂直于圆O所在平面，AB是直径，C圆周上一点，过A作AE⊥PC于E，求证：AE⊥面PBC



证：∵ AB为直径

∴ $AC\perp BC$

又∵ PA⊥圆O

∴ $PA\perp BC$，又∵ $PA\cap AC=A$

∴ BC⊥面PAC

∴ $AE\perp BC$

又∵ $AE\perp PC$，且 $BC\cap PC=C$

∴ AE⊥面PBC

例3. 正四棱柱中. $AA_1=2AB=4$, 点E在C_1C上 且$C_1E=3EC$

求证 $A_1C\perp$面BED

证: 取CC_1中点F. 连接AF, OE, AC

$AC=2\sqrt{2}$. $CF=2$. $AA_1=4$. $\therefore \frac{AC}{CF}=\frac{AA_1}{AC}=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle AA_1C \backsim \triangle ACF$

$\therefore \angle A_1CA=\angle CFA$

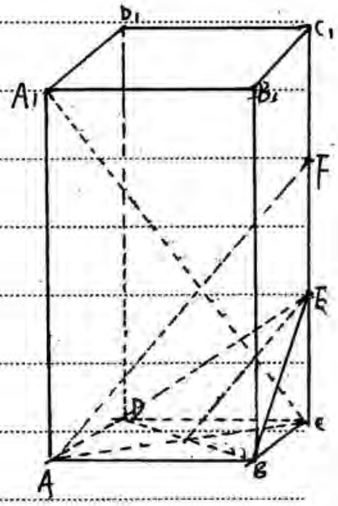
$\therefore \angle CAF+\angle A_1CA=90^\circ$ $\therefore AF\perp A_1C$ 又$\because OE\parallel A_1C$

$\therefore OE\perp A_1C$

又$\because$ $BD\perp$面AA_1C_1C

$\therefore BD\perp A_1C$

$\therefore A_1C\perp$面BED



例4. 正方体中, P为DD_1中点, O为底面ABCD中点,

求证: 连接B_1C. BD. 过P作$PQ\parallel AB$交BB_1

于Q, 连接

设正方体棱长为2a, [$\triangle OPD \backsim \triangle B_1BD$]

$\angle B_1BO=90^\circ$ Rt$\triangle B_1BO$中: $OB=\sqrt{2}a$, $BB_1=2a$

$\therefore OB_1=\sqrt{6}a$. $\because OC=\sqrt{2}a$, $B_1C=2\sqrt{2}a$

$\therefore OB_1^2+OC^2=B_1C^2$

$\therefore B_1O\perp AC$ 又$\because AP=\sqrt{5}a$, $AO=\sqrt{2}a$

$\therefore OP=\sqrt{3}a$, 又$\because PQ=BD=2\sqrt{2}a$, $BQ=\frac{1}{2}BB_1=a$

$\therefore$ Rt$\triangle PQB_1$中: $B_1P=3a$. $\therefore OB_1^2+OP^2=B_1P^2$

$\therefore B_1O\perp OP$. 又$\because$ $AC\cap OP=O$

$\therefore B_1O\perp$面PAC

三. 直线与平面垂直的性质

1. $a\perp\alpha$, 则a垂直于α内任意一条直线

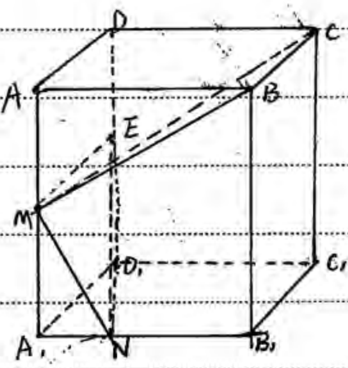
2. 垂直于同一平面的两条直线相平行

简记: 线面垂直 => 线线平行

符号: $a\perp\alpha$, $b\perp\alpha$, 则$a\parallel b$

例1. 正方体中, N为A_1B_1上的点且$A_1N=\frac{1}{3}NB$, M为A_1A中点,

求证: $MN\perp MC$.



证: $\triangle A_1MN \backsim \triangle ABM$

$\therefore \angle BMN=90°$. $\therefore MN\perp BM$

设棱長为$4a$, $\therefore A_1N=a$. $A_1M=2a$

$\therefore MN=\sqrt{5}a$. $ME=4a$. $D_1N=\sqrt{17}a$

$\because DE=2a$, $\therefore NE=\sqrt{21}a$

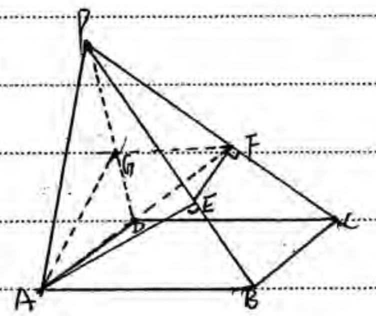
$\therefore ME^2+MN^2=NE^2$ $\therefore \angle NME=90°$. $\therefore MN\perp ME$

$\therefore MN\perp BC$. $\therefore MN\perp$面MBC, $\therefore MN\perp MC$

例2. 已知四边形$ABCD$为矩形, $PA\perp$面$ABCD$, $AE\perp PB$. $EF\perp PC$

(1) 求证: $AF\perp PC$

(2) 设面AEF交PD于G, 求证: $AG\perp PD$



解: (1) 证: $\because PA\perp$面$ABCD$

$\therefore PA\perp BC$

又$\because BC\perp AB$

$\therefore BC\perp$面PAB. $\therefore BC\perp AE$

又$\because AE\perp PB$. $\therefore AE\perp$面PBC

$\therefore AE\perp PC$

又∵ $EF\perp PC$

∴ $PC\perp$面AEF，∴ $AF\perp PC$

(2) ∵ $PC\perp$面AEF

∴ $PC\perp AG$

又∵ $PA\perp CD$，$CD\perp AD$

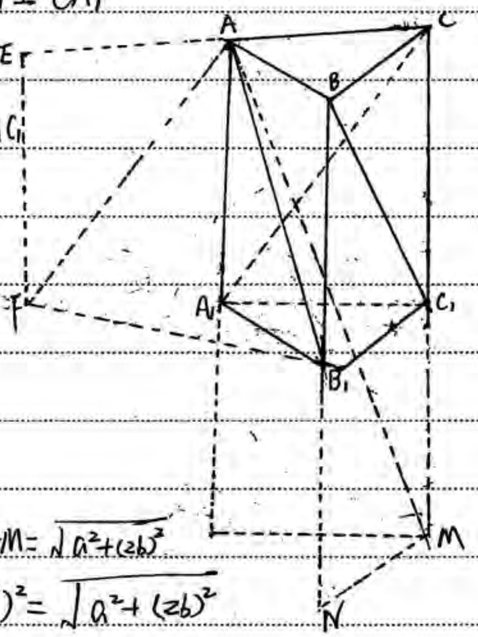
∴ $CD\perp$面PAD

∴ $CD\perp AG$

∴ $AG\perp$面PCD

∴ $AG\perp PD$

例3. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面三条对角线 AB_1，BC_1，CA_1 中，$AB_1\perp BC_1$，求证：$AB_1\perp CA_1$



证：把平面 AA_1C_1C 和 BB_1C_1C 平移得到平面 AA_1FE 和 B_1NMC_1

设 $A_1B_1=a$，$AA_1=b$

∴ $AF=A_1C=\sqrt{a^2+b^2}$

$AB_1=\sqrt{a^2+b^2}$

又∵ $\angle FA_1B_1=120^\circ$

∴ $\angle B_1F=\sqrt{3}a$

又∵ $B_1M=BC_1=\sqrt{a^2+b^2}$ $AM=\sqrt{a^2+(2b)^2}$

∴ $Rt\triangle AB_1M$中，$(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2=\sqrt{a^2+(2b)^2}$

∴ $2a^2+2b^2=a^2+4b^2$，∴ $a^2=2b^2$

∴ $AF^2=a^2+b^2=3b^2$

$AB_1^2=a^2+b^2=3b^2$

$B_1F^2 = 3a^2 = 6b^2$

$\therefore AF^2 + AB_1^2 = B_1F^2$

$\therefore AF \perp AB_1$. $\therefore AB_1 \perp CA_1$

(1) P在底面射影为△ABC垂心

$\left.\begin{array}{l} CP \perp 面ABP \\ PA \perp 面ABC \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp 面CPA \Rightarrow AB \perp CH$

(2) △CPD 为直角三角形 => $PD^2 = DH \cdot DC$

(3) △HAB 是 △PAB 在底面的射影

(4) $S^2_{\triangle PAB} = S_{\triangle HAB} \times S_{\triangle CAB}$ ①

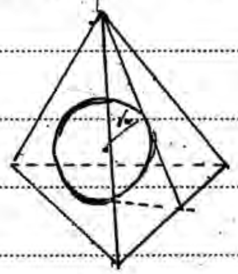
$S^2_{\triangle PBC} = S_{\triangle HBC} \times S_{\triangle CAB}$ ②

$S^2_{\triangle PAC} = S_{\triangle HAC} \times S_{\triangle CAB}$ ③

已知 $\left\{\begin{array}{l} PA \perp AB \\ PB \perp PC \\ PC \perp PA \end{array}\right.$

① + ② + ③ => $S^2_{\triangle PAB} + S^2_{\triangle PBC} + S^2_{\triangle PAC} = S^2_{\triangle CAB}$

正四面体 （r.R 为内接球外接球半径）



$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$
$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ => $\frac{R}{r} = \frac{3}{1}$

练习:

1. 四面体ABCD中. AC⊥BD. AB⊥CD. 求证: AD⊥BC

证：过A作$AO\perp$面BCD于O，则$AO\perp BD$，$AO\perp BC$，$AO\perp CD$

∵$AC\perp BD$

∴$BD\perp$面AOC

∴$BD\perp CO$

即$BD\perp CE$

同理，$CD\perp BF$

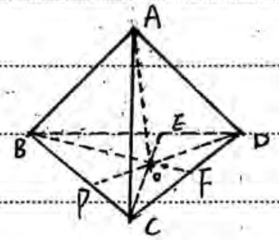
∵O为$\triangle BCD$的重心

∴$OP\perp BC$ 即$DO\perp BC$

又∵$AO\perp BC$

∴$BC\perp$面AOD

∴$AD\perp BC$



2. Rt$\triangle ABC$中，斜边AB，过A作$AP\perp$面ABC，$AE\perp PB$于E，$AF\perp PC$于F，求证：$PB\perp$面AEF。

证：∵$AP\perp$面ABC

∴$AP\perp BC$

又∵$AC\perp BC$

∴$BC\perp$面APC

∴$BC\perp AF$

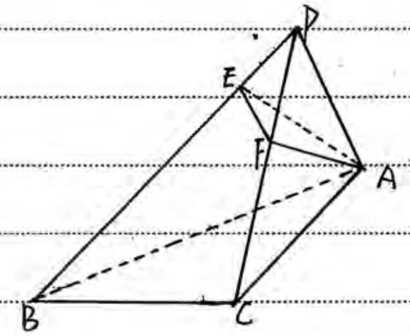
又∵$AF\perp PC$

∴$AF\perp$面PBC

∴$AF\perp PB$

又∵$AE\perp PB$

∴$PB\perp$面AEF

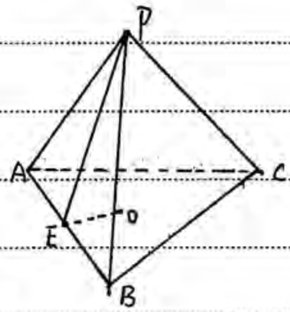


3. O是$\triangle ABC$外心，P是$\triangle ABC$所在平面外一点，且$PA=PB=PC$

求证：$PO\perp$面ABC

证：过P作$PE\perp AB$于E，连接OE

$\because PA=PB$，且$PE\perp AB$



$\therefore E$为AB中点

又$\because$ O为ABC外心

$\therefore OE\perp AB$

又$\because PE\perp AB$ $\therefore AB\perp$面POE

$\therefore PO\perp AB$

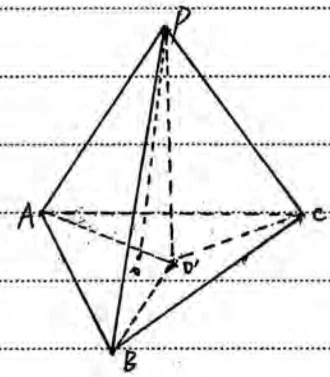
同理：$PO\perp AC$，$PO\perp BC$

$\therefore PO\perp$面ABC

方法二：过P作PO'垂直于面ABC

$\because PA=PB=PC$

$\angle PO'A=\angle PO'B=\angle PO'C=90°$



$\therefore \triangle PO'A\cong\triangle PO'B\cong PO'C$

$\therefore O'A=O'B=O'C$

$\therefore O'$为$\triangle ABC$外心

$\therefore O'$与O重合

$\therefore PO\perp$面ABC

两个面平行的判定及性质

一. 两平面平行定义

如果两个平面没有公共点,则这两平面相互平行 ($\alpha \cap \beta = \phi$)

记作: $\alpha // \beta$

二. 两平面位置关系

1. 平行

2. 相交

三. 两平面平行的判定

1. 定义

2. 判定定理

一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行. 则这两个平面平行.

简记: 线面平行 => 面面平行
(两条相交直线)

符号: $a \subset \alpha$. $b \subset \alpha$ 且 $a \cap b = P$, $a // \beta$. $b // \beta$ 则 $\alpha // \beta$

四. 两平面平行的性质

1. 若 $\alpha // \beta$. 则 α 内任意直线都平行于 β. ($\alpha // \beta$. $a \subset \alpha$. 则 $a // \beta$)

2. 性质定理.

两个平行平面被第三个平面所截. 则两个交线平行

(面面平行 => 线线平行)

$\alpha // \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$. $\beta \cap \gamma = b$. 则 $a // b$

例1. 正方体中. (1) 求证: 面 A_1BD // 面 CB_1D_1

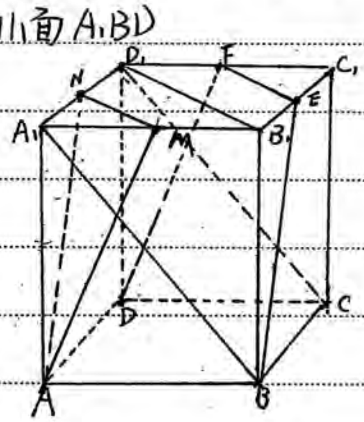
(2) M.E.F.N 分别为中点. 求证: 面 MAN // 面 EFDB

(1) 证：∵ 正方体 ∴ $CD_1 \parallel A_1B$. ∴ $CD_1 \parallel$ 面 A_1BD

又∵ $B_1C \parallel A_1D$. ∴ $B_1C \parallel$ 面 A_1BD

又∵ $CD_1 \cap B_1C = C$

∴ 面 $A_1BD \parallel$ 面 CB_1D_1



(2) 证：∵ M.E.F.N 分别为中点

∴ $MN \parallel B_1D_1$. $EF \parallel B_1D_1$

∴ $MN \parallel EF$

∴ $MN \parallel$ 平面 EFDB

又∵ 正方体

∴ $AN \parallel BE$ ∴ $AN \parallel$ 面 EFDB

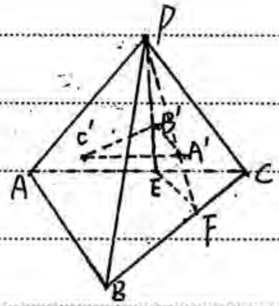
又∵ $MN \cap AN = N$

∴ 面 MAN $\parallel$ 面 EFDB

例2. P是△ABC所在平面外一点，A'.B'.C' 分别为 △PBC, △PCA △PAB 重心

(1) 求证：面 A'B'C' $\parallel$ 面 ABC

(2) 求 $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC}$



解：(1) 证：$A'B' \parallel EF$. $EF \parallel AB$

∴ $A'B' \parallel AB$

∴ $AB' \parallel$ 面 ABC

同理 $C'B'C' \parallel$ 平面ABC

∴ 面A'B'C' $\parallel$ 平面ABC

(2) $A'B'=\frac{2}{3}EF$. $EF=\frac{1}{2}AB$

$\therefore A'B'=\frac{1}{3}AB$ 同理：$B'C'=\frac{1}{3}BC$. $A'C'=\frac{1}{3}AC$

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=1:9$

例3：已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱. E.F 分别为 AC 和 A_1C_1 中点

求证：面 AB_1F // 面 BEC_1

证：∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$

∴ $B_1F \parallel BE$ ∴ B_1F // 面 BEC_1

又∵ $FC_1 \underline{\parallel} AE$

∴四边形 AEC_1F 为平行四边形

∴ $AF \parallel C_1E$ ∴ AF // 面 BEC_1

∴面 AB_1F // 面 BEC_1

两个平面垂直的判定及性质

一. 定义

两个平面相交所成的二面角是直二面角. 则称这两个平面相互垂直. 记作 $\alpha \perp \beta$

二. 两个平面垂直的判定

1. 计算两平面所成二面角为 90°（定义）

2. 判定定理

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线. 那么这两个平面互相垂直. 简记：线面垂直 ⟹ 面面垂直

（过线的面）

符号：$a\perp\alpha$，$a\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

例1. 正方形ABCD，PD⊥面ABCD，在面PDA、PDC、PAB、PBC、PDB、PAC、ABCD中，共有7对相垂直面

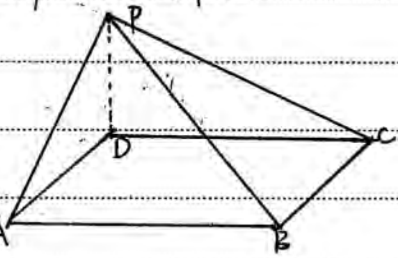
面PDA ⊥面ABCD　　面PAB⊥面PBC

面PDC ⊥面ABCD　　面PAC⊥面PBD

面PDA ⊥面PDC

面PDA ⊥面PAB

面PDC ⊥面PBC



2. AB⊥面BCD，BD⊥CD，求证：面ABD⊥面ACD

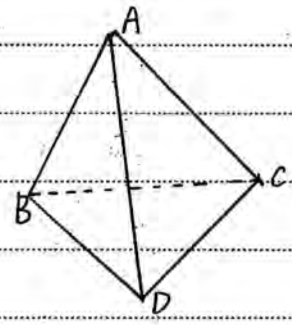
证：∵ AB⊥面BCD

∴ AB⊥CD

又∵ BD⊥CD

∴ CD⊥面ABD

∴ 面ABD⊥面ACD



3. 如图，AB=AD，BC=CD，PA⊥面ABCD，求证：面PAC⊥面PBD

证：△ABC ≌ △ADC，∴ ∠1=∠2

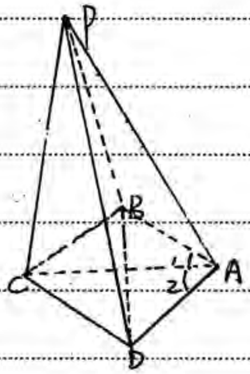
又∵ AB=AD　　∴ AC⊥BD

又∵ PA⊥面ABCD

∴ PA⊥BD

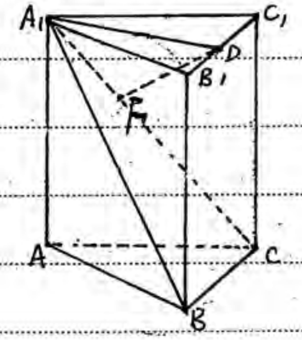
∴ BD⊥面PAC

∴ 面PAC⊥面PBD



4. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，F是 A_1C 上两点，D在 B_1C 上

$A_1D \perp B_1C$，求证：面 $A_1FD \perp$ 面 BB_1C_1C



证：∵直三棱柱

∴ $C_1C \perp$ 面 $A_1B_1C_1$ ∴ $CC_1 \perp A_1D$

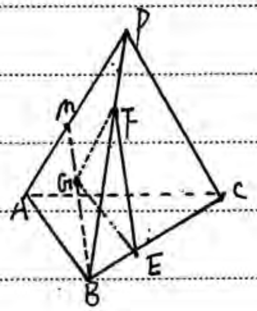
又∵ $A_1D \perp B_1C$

∴ $A_1D \perp$ 面 BB_1C_1C

∴面 $A_1FD \perp$ 面 BB_1C_1C

5. 如图 PA.PB.PC 两两垂直，G是 $\triangle PAB$ 重心，EF分别在

BC.PB上，$\frac{BE}{EC}=\frac{PF}{FB}=\frac{1}{2}$，求证：面 $GEF \perp$ 面 PBC



证：连接 BG

$\frac{BG}{BM}=\frac{BF}{bF}=\frac{2}{1}$

∴ $\triangle BGF \backsim \triangle BMP$ ∴ $GF \parallel AP$

∵ $PA \perp PB$ $PA \perp PC$

∴ $PA \perp$ 面 PBC ∴ $GF \perp$ 面 PBC

∴面 $GEF \perp$ 面 PBC

三. 性质定理

如果两个平面垂直，那么在一个平面内，垂直于交线的直线也垂直于另一个面。

简记：面面垂直 ⇒ 线面垂直

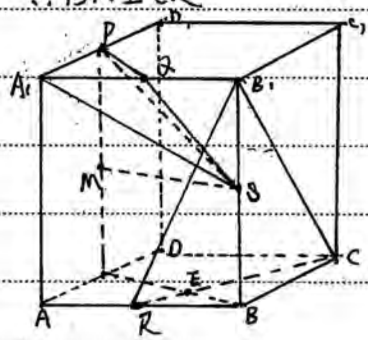
符号：$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = l$，$a \subset \alpha$，$a \perp l$，则 $a \perp \beta$

例1: 正方体中, P.Q.R.S分别为 A_1D_1、A_1B_1、BB_1 中点, 求证: 面 $PQS \perp$ 面 B_1RC

证: 过 P 作 $PN \perp AD$ 于 N, 取 PN 中点 M, 连接 MS、NB

$\therefore MS \parallel NB$

$\triangle ABN \cong \triangle BCR \Rightarrow \angle BER = 90°$. $\therefore BN \perp CR$



$\therefore MS \perp CR$

又 $\because PN \perp$ 面 $ABCD$

$\therefore PN \perp CR$

$\therefore CR \perp$ 面 PMS

$\therefore PS \perp CR$

连接 A_1S

$\left.\begin{array}{l} A_1S \perp B_1R \\ A_1D_1 \perp \text{面} AA_1B_1B \Rightarrow A_1D_1 \perp B_1R \end{array}\right\} \Rightarrow B_1R \perp \text{面} A_1PS$

$\therefore B_1R \perp PS$

$\therefore PS \perp$ 面 B_1CR

$\therefore$ 面 $PQS \perp$ 面 B_1RC

2. ABCD为矩形, CF⊥面ABCD, DE⊥面ABCD, $AB=4a$, $BC=CF=2a$, P为AB中点.

(1) 求证: 面PCF⊥面PDE

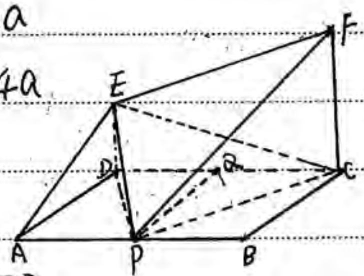
(2) 求四面体PCEF体积

(1) 证: ∵ 矩形ABCD, P为AB中点

∴ $BP=BC=2a$, $AP=AD=2a$

∴ $DP=CP=2\sqrt{2}a$, ∵ $CD=4a$

∴ $DP\perp CP$



又∵ DE⊥面ABCD

∴ $DE\perp CP$, ∴ CP⊥面DEP

∴ 面PCF⊥面PDE

(2) $h=PQ=4a$

$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times 2a\times 2a=2a^2$

∴ $V=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot h=\frac{1}{3}\times 2a^2\times 4a=\frac{8}{3}a^3$

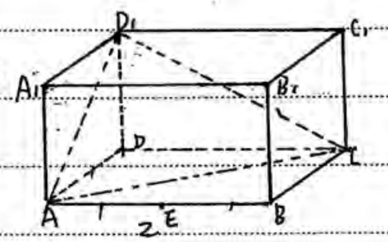
距 离

例1: 长方体 $AA_1=AD=1$, $AB=2$, E为AB中点, 求E到面 ACD_1 距离

解: $AD_1=\sqrt{2}$, $CD_1=\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{5}$

∴ $S_{\triangle ACD_1}=\frac{3}{2}$, $S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}$

∴ $V_{E-ACD_1}=V_{D_1-AEC}$



$\therefore \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1$

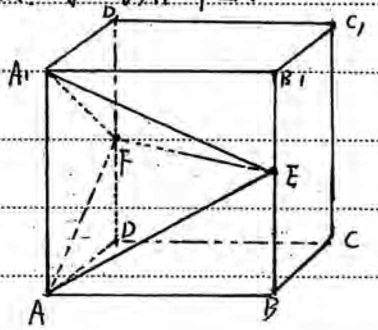
$\therefore h=\frac{1}{3}$

2. 正方体棱长为1. E.F 为中点. 求 V_{A_1-FEA}

$V_{A_1-FEA}=V_{F-A_1AE}$

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times1\times1)\times1$

$=\frac{1}{6}$



3. 正方形ABCD中. AB=2. E为AB中点. F在BC边上. 将△AED和△DCF折起. 使AC重合于A'

(1) 求证: $A'D\perp EF$

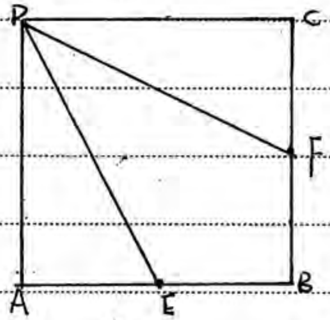
(2) 当 $BF=\frac{1}{4}BC$ 时. 求 $V_{A'-EFD}$

(1) 证: 由原图知:

$A'D\perp A'E$. $AD'\perp A'F$

$\therefore A'D\perp$ 面 $A'EF$

$\therefore A'D\perp EF$



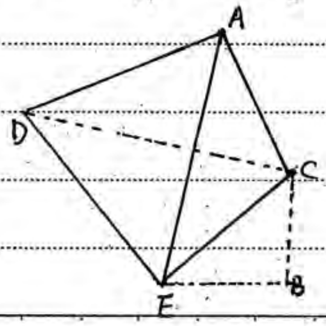
(2) $BF=\frac{1}{2}$, $BE=1$. $A'D=AD=2$

$\therefore EF=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$A'E=AE=1$. $A'F=CF=\frac{3}{2}$

$\therefore EF^2+A'E^2=A'F^2$

$\therefore A'E\perp EF$



$\therefore S_{\triangle A'EF} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$\therefore V_{A'-EFD} = V_{D-A'EF} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{5}}{6}$

4. AB为⊙O直径. E.F在圆上. AB∥EF. 矩形ABCD垂直于⊙O平面, AB=2. AD=EF=

(1) 求证: AF⊥面CBF

(2) M为FC中点. 求证: OM∥面DAF

(3) 求 $V_{F-ABCD} : V_{F-CBE}$

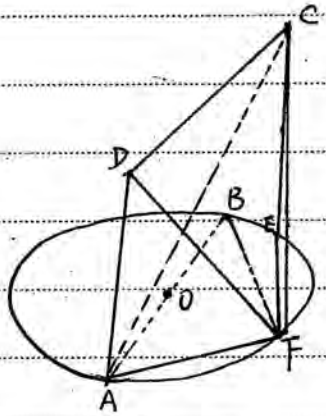
(1) 证: ∵ AB为直径

∴ BF⊥AF

又∵面ABCD⊥⊙O平面

∴ CB⊥AF

∴ AF⊥面CBF



(2) 取DF中点、N连接MN

∴ MN∥CD 且 $MN=\frac{1}{2}CD$

∴ AO∥CD 且 $AO=\frac{1}{2}CD$

∴ MN $\underline{\underline{\parallel}}$ AD.

∴四边形OANM为平行四边形

∴ OM ∥ AN

∴ OM∥面DAF

(3) $V_{F-ABCD} : V_{F-CBE}$

$= 2V_{F-ABC} : V_{F-CBE}$

$= 2V_{C-ABF} : V_{C-BEF}$

$= 2S_{\triangle ABF} : S_{\triangle BEF}$ · $\because AB \parallel EF$

$= 2AB : EF = 4:1$

5. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中. $AB=2$. P在A_1B上. 且 $AB\perp CP$,

(1) 求证: P为A_1B中点

(2) 若$A_1B\perp AC_1$, 求V_{P-A_1AC}

(1) 证: 过P作$PE\parallel A_1A$ 交AB于E. 连接CE

$\because$ 正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$

$\therefore A_1A\perp AB$

$\therefore PE\perp AB$

又$\because AB\perp CP$. $\therefore AB\perp$面CEP

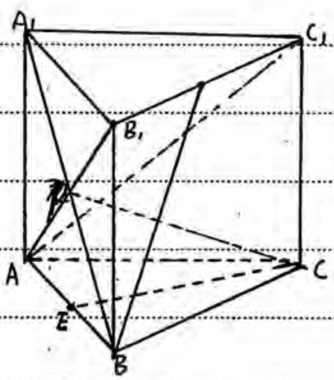
$\therefore CE\perp AB$

又$\because \triangle ABC$等边三角形

$\therefore E$为AB中点

又$\because EP\parallel AA_1$. P在A_1B上

$\therefore P$为A_1B中点



(2) 取B_1C中点M. 连接AB_1, BM

$\therefore MP\parallel AC_1$

$\because A_1B\perp AC_1$ $\therefore PB\perp MP$. 且$PB=MP$

设 $AA_1=BB_1=x$

$Rt\triangle PBM$中. 可求 $x=\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\triangle A_1AC_1}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

P到面A_1AC_1的距离为B到面A_1ACC_1高的一半

$\because h_B=\sqrt{3}$. $\therefore h_P=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore V=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

直线与平面成角

一. 概念

1. 斜线在平面内的射影

斜线：直线与平面相交但不垂直. 称直线为平面斜线.

斜线与平面交点为斜足

从斜线上斜足以外一点向平面引垂线, 过垂足与斜足的直线叫做斜线在这个平面内的射影

2. 直线与平面所成角

平面的一条直线和它在这个平面内的射影所成的锐角

注: 当直线$l\perp$面α. 线面角$\theta=90^\circ$

当直线$l\parallel$面α. 线面角$\theta=0$

当直线$l\subset$面α. 线面角$\theta=0$

直线与平面所成角的取值范围：$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

3. 最小角定理

斜线和平面所成角是这条斜线和这个平面内经过斜足的直线所成一切角中最小角

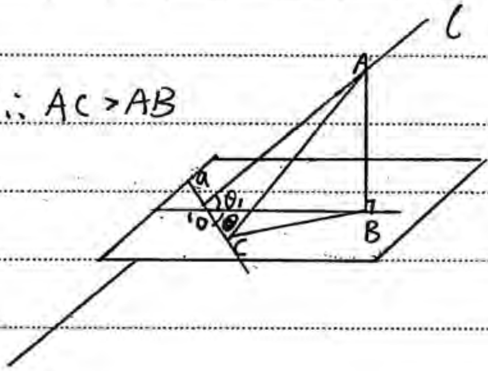
证明: $\sin\theta_1=\frac{AB}{AD}$

$\sin\theta = \frac{AC}{AD}$

$\triangle ABC$ 为直角三角形 $\therefore AC > AB$

$\therefore \sin\theta > \sin\theta_1$

$\therefore \theta > \theta_1$



4. 三余弦定理 (如3图)

设 $\angle AOB = \theta_1$, $\angle BOC = \theta_2$. $\angle AOC = \theta$

$\cos\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$　　$\triangle BOC$ 为直角三角形 ($\angle BCO = 90°$)

证明: $\cos\theta = \frac{OC}{AD}$.　$\cos\theta_1 = \frac{OB}{AD}$.　$\cos\theta_2 = \frac{OC}{BD}$

$\therefore \cos\theta = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2$

5. 三垂线定理.

平面内的一条直线和平面的斜线在面内的射影垂直.

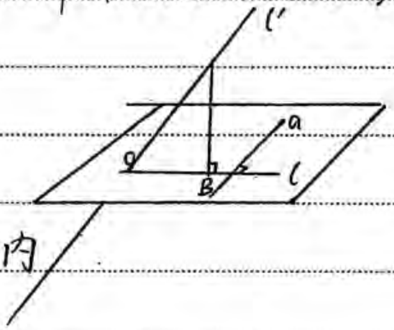
则它与斜线垂直

6. 三垂线定理的逆定理

平面内一条直线和平面的一条

斜线垂直, 则它与斜线在面内

的射影垂直



例1: 长方体中. $PQ \parallel AB$. $C_1Q \perp PR$. 求证: $D_1Q \perp QR$

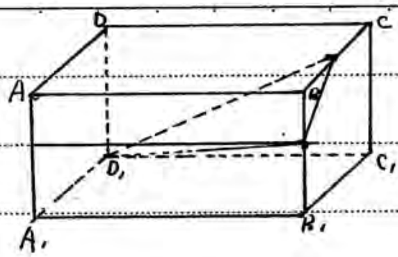
证: $\because$ PR 在面 BC_1 内射影为 QR

$C_1Q \perp PR$

$\therefore C_1Q \perp QR$

$\because D_1Q$ 在面BC射影为C_1Q

$\therefore D_1Q \perp QR$



例2. 求线面角

(1) 正方体中, 求角

① BD 与面BCC_1B_1

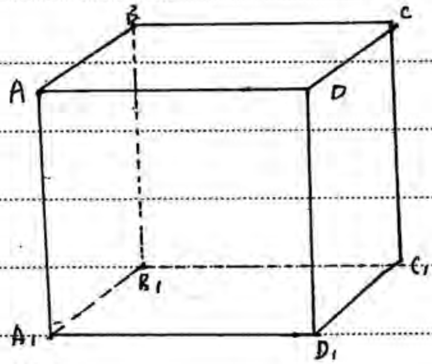
② B_1D与面ABCD

③ DC_1与面ACC_1A_1

④ E为A_1D_1中点, 求DE与面ACC_1A_1

⑤ DD_1 与面 A_1DC_1

⑥ M.N为AA_1. AD中点, 求AB与面 MNB



解: ① 45°

② $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

③ 30°

④ $\cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

⑤ $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

⑥ $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) 正四面体 A-BCD 中. 求角

① AD 与面 BCD

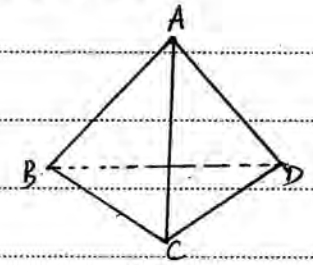
② E 为 AB 中点. 求 CE 与面 BCD

③ E 在 AD 上. 且 AE=3ED. 求 AD 与面 BCE

解: ① $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $\cos\theta = \sqrt{7}/3$

③ $\cos\theta = \frac{5}{3}$



二面角

一. 定义.

从一条直线出发的两个半平面所组成的空间图形叫二面角

这条直线叫做二面角的棱.

表示: $\alpha - l - \beta$ (l 为平面 α 与 β 交线)

A-BC-D (面 ABC 与面 BCD 成角)

二. 二面角范围.

1. 定义: 以二面角棱上任意一点为端点. 在两个面内分别做垂直于棱的两条射线. 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。

2. 范围: $[0, \frac{\pi}{2}]$

直线倾斜角与斜率

一. 直线倾斜角

1. 定义：

直线 l 与 x 轴相交时 取 x 轴作为基准 x 轴正方向与直线 l 向上的方向之间所成的角叫做直线 l 的倾斜角、

2. 取值范围 ： $\alpha \in [0, \pi)$

二. 直线的斜率

1. 定义：

不等于 90° 的倾斜角的正切值叫做直线的斜率

2. 斜率公式：

$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$

$$k_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

三. 直线的方向向量

定义：直线上的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 及与其平行的向量都称为直线的方向向量 零向量除外.

方向向量 $\vec{a}$ 可改写为 $\vec{a} = (1, k)$

四 三点共线

A. B. C 三点共线 $\Leftrightarrow k_{AB} = k_{AC} = k_{BC}$

例1：求直线 $x\cos\theta + \sqrt{3}y + 2 = 0$. 倾斜角 α 范围.

解：$\sqrt{3}y = -\cos\theta \cdot x - 2$

$\therefore y = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan\alpha = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$

$-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \alpha \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$

例2. 已知 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$，求过 $P_1(0, \cos\alpha)$，$P_2(\sin\alpha, 0)$ 的直线倾斜角.

解: $k = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha}$

$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{\tan\alpha}$

$\because -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

$\therefore \tan\alpha < 0$

$\therefore \tan\theta > 0$ 又 $\because \theta \in [0, \pi)$

$\therefore \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

例3. 将直线 $l: y = 2x$ 按向量 $\vec{a} = (3, 0)$ 平移得到 l'，求 l' 方程

解: $k_{l'} = 2$

$l': y = 2(x-3) = 2x-6$

例4. 已知 $A(2,2)$，$B(a,0)$ $C(0,b)$ $(ab \ne 0)$ 共线，求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

解: $k_{AB} = k_{AC}$

$\therefore \frac{-2}{a-2} = \frac{b-2}{-2}$

$\therefore ab - 2a - 2b = 0$

$\therefore 2a + 2b = ab$

$\therefore \frac{2}{b} + \frac{2}{a} = 1$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$

例5. 已知 $A(-3,4)$，$B(3,2)$，过 $P(2,-1)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点，求 l 的斜率 k 范围

解: $l_{AB}: y = -\frac{1}{3}x + 3$

$\therefore$

设l: $y+1=k(x-2)$

$\therefore x=\frac{6k+2}{3k+1} \in [-3,3]$

$\therefore k\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

直线的方程			
名称	方程的形式	常数的意义	适用范围
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	(x_0,y_0)为直线上定点 k为斜率	不垂直于x轴的直线
斜截式	$y=kx+b$	b是直线在y轴上的截距	不垂直于x轴的直线
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1,y_1) (x_2,y_2)为直线上定点	不与坐标轴垂直(平行)的直线
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\neq0,b\neq0)$	a为直线在x轴上截距，b为直线在y轴上截距	不经过原点，不垂直于坐标轴的直线
一般式	$Ax+By+C=0$ (A、B不同时为0，即 $A^2+B^2\neq0$)		一切直线

例1: 1. 直线l: $ax+y-2-a=0$ 在x轴和y轴上截距相等，求a

解: $a\neq0$ $a+2=\frac{a+2}{a}$ 截距相等注意截距都为0

$\therefore a=1$ 或 -2

2. 已知直线 $(2+m-m^2)x-(4-m^2)y+m^2-4=0$，若斜率不存在，求m

解: $(4-m^2)y=(2+m-m^2)x+m^2-4$

$\therefore m=2$

例2.

1. 直线 l: $kx-y+1+2k=0$. 证明: l过定点

$k(x+2)-(y-1)=0$

$\therefore$ 过 $(-2,1)$

2. 直线 l: $(a+b)x+(a-b)y+2=0$ 且 $3a-b+2=0$. 证明: l过定点

$b=3a+2$

$\therefore (4a+2)x+(-2a-2)y+2=0$

$\therefore (2a+1)x-(a+1)y+1=0$

$\therefore 2ax+x-ay-y+1=0$

$a(2x-y)+(x-y+1)=0$

$\therefore \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\therefore$ 过 $(1,2)$

例3.

1. $AC<0$, $BC<0$. 则 $Ax+By+C=0$ 不过第三象限

2. 直线 $(3a+2)x+y+8=0$ 不过第二象限, 则a的范围为

$a\leq -\frac{2}{3}$

两条直线的位置关系

一、两直线平行

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$. l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$

若 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1$ 且 $B_1C_2\neq B_2C_1$ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

二、两直线垂直

$l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

三. 点到直线距离公式

$P(x_0, y_0)$ 到 $Ax+By+C=0$

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

四. 两条直线间距离

l_1: $Ax+By+C_1=0$. l_2: $Ax+By+C_2=0$

$$d = \frac{|C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

五. 到角公式

1. 定义: 两直线 $l_1 l_2$ 相交. 把直线 l_1 按逆时针方向旋转到与 l_2 重合所转的角叫 l_1 到 l_2 的角, 为 θ

2. 取值范围 : $\theta \in [0, \pi]$

3. 公式: $\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ (l_1 到 l_2)

六. 夹角公式

1. 定义: l_1 与 l_2 相交, l_1 到 l_2 的角与 l_2 到 l_1 的角中较小的角称为 l_1 与 l_2 的夹角 α.

2. 公式: $\tan\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$

七. 直线系

l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$

l_1 与 l_2 相交于一点 P. 过 P 的所有直线都可表示为:

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$

不能表示 l_2

例1:

(1) 求过点A(1,-4)，且与直线 $2x+3y+5=0$ 平行的直线方程

$2x+3y+10=0$

(2) 求过点 $P(3,1)$ 且与 $A(1,2)$，$B(-1,4)$ 距离相等的直线方程.

$y=-x+4$. 或 $y=-\frac{2}{3}x+3$

(3) m为何值时，直线 $l_1: x+my+\frac{1}{5}=0$ 与 $l_2: (m-2)x+15y+2m=0$

平行 $m=5$

(4) a满足什么条件时，直线 $l_1: x+y=2$，$l_2: x-y=0$

$l_3: x+ay-3=0$. 可以围成三角形，三条直线不能相交同一点

$\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{cases}$ ~~$\therefore a\neq\pm1$，且 $a\neq 2$~~ $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow (1,1)$

$\therefore 1+a-3=0$ $\therefore a=2$ $\therefore a\neq 2$

例2:

(1) $l_1: (m+3)x+(m-1)y-5=0$ $l_2: (m-1)x+(3m+9)y-1=0$

垂直，求M

$(m+3)(m-1)+(m-1)(3m+9)=0$

$\therefore m=1$ 或 -3

(2) $\triangle ABC$ 中，A$(-10,2)$，$B(6,4)$ 垂心 $A(5,2)$，求顶点C坐标

$C(6,-6)$

(3) $\vec{a}=(6,2)$ $\vec{b}=(-4,\frac{1}{2})$ 直线l过点 $A(3,-1)$ 且与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 垂直

求l方程.

$\vec{a}+2\vec{b}=(-2,3)$

l_1: $y=\frac{2}{3}x-3$

(4) l_1: $x+3y=7$ 与 l_2: $kx-y=2$，以及x轴、y轴围成的凸多边形有外接圆，求k值

$k=3$. $l_1 \perp l_2$

例3:

(1) 求直线l_1: $x-y-2=0$关于l_2: $3x-y+3=0$对称的直线方程

$7x+y+22=0$

(2) 光线经过点A(-2,4)，经$2x-y-7=0$反射后光线过点B(5,8)

求入射光线与反射光线所在直线方程

入: $2x-11y+48=0$

反: $2x+y-18=0$

(3) 已知 A(4,-1) B(8,2)，动点P(x,y)在直线l: $x-y-1=0$上

求$|PA|+|PB|$最小值

$\sqrt{65}$

(4) △ABC中，A(4,5)，B点在直线$2x-y+2=0$上，C在x轴上，求△ABC周长最小值。

C(4,0) $C_{min}=5+\sqrt{65}$

A关于直线对称点$A_1(0,7)$，A关于y轴对称点为(4,-5)

$\therefore C_{min}=A_1A_2=4\sqrt{10}$。

例4:

(1) 求$P_0(-1,2)$到$2x+y-10=0$距离

$d=2\sqrt{5}$

(2) 直线l过点A(3,3)并且被两平行线l_1: $3x+4y-7=0$与

l_2: $3x+4y+8=0$ 所截得线段长为$3\sqrt{2}$，求l方程

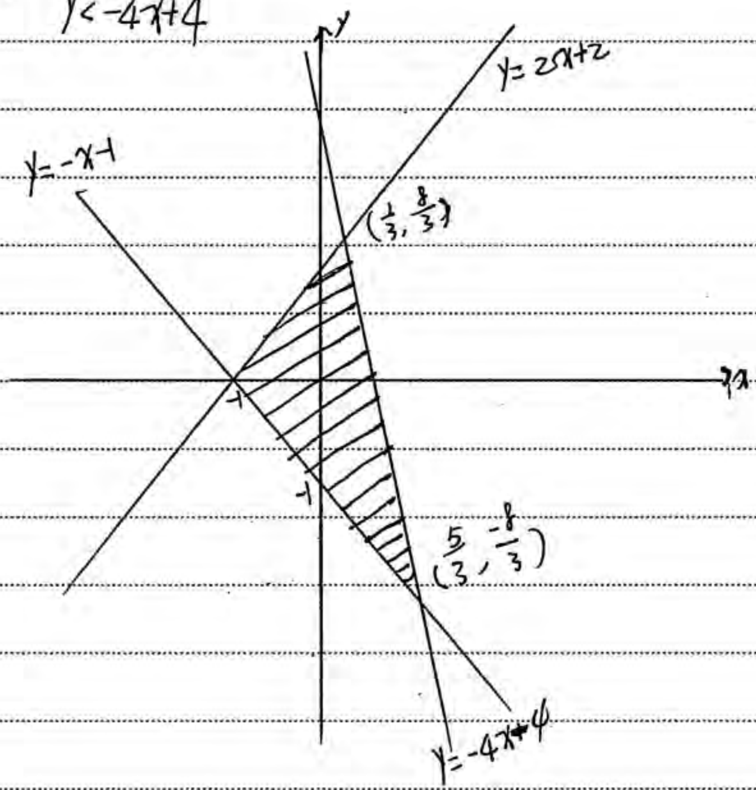
$k=\frac{1}{7}$ 或 -7 （夹角公式）

线性规划

例1. 画平面区域

(1) 画出 $\begin{cases} x+y+1\geq 0 \\ 2x-y+2\geq 0 \\ 4x+y-4<0 \end{cases}$ 表示区域

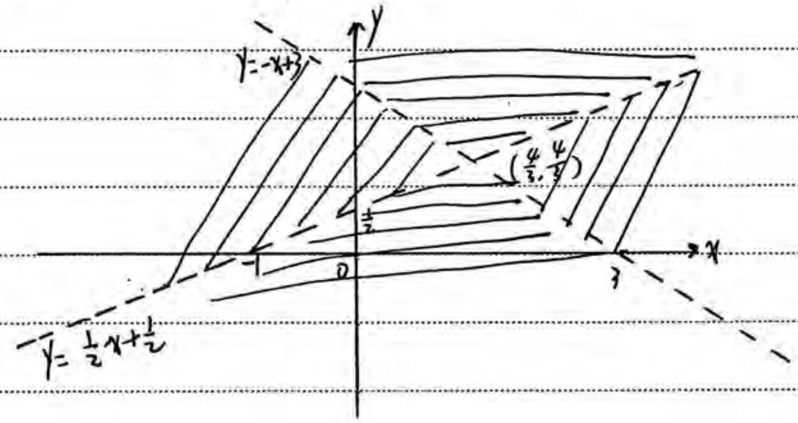
解: $\begin{cases} y\geq -x-1 \\ y\leq 2x+2 \\ y<-4x+4 \end{cases}$



(2) $(x-2y+1)(x+y-3)<0$

① $\begin{cases} x-2y+1>0 \\ x+y-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y<-x+3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x-2y+1<0 \\ x+y-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y>-x+3 \end{cases}$



(3) $|x|+|y|\leq 1$

① $x\geq 0$, $y\geq 0$. 时

$x+y\leq 1$

$\therefore y\leq 1-x$

② $x\geq 0$时, $y<0$时

$x-y\leq 1$

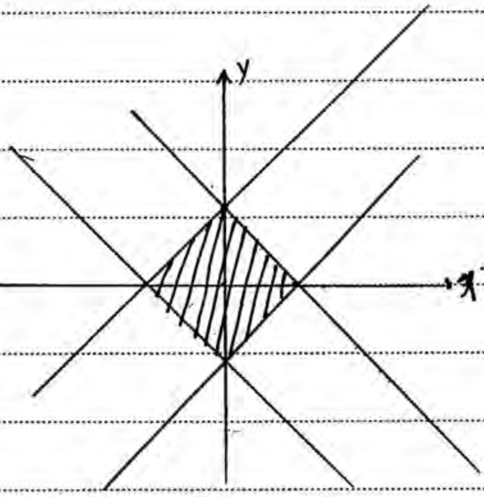
$\therefore y\geq x-1$

③ $x<0$, $y\geq 0$时.

$-x+y\leq 1$

$\therefore y\leq x+1$

④ $x<0$, $y<0$时

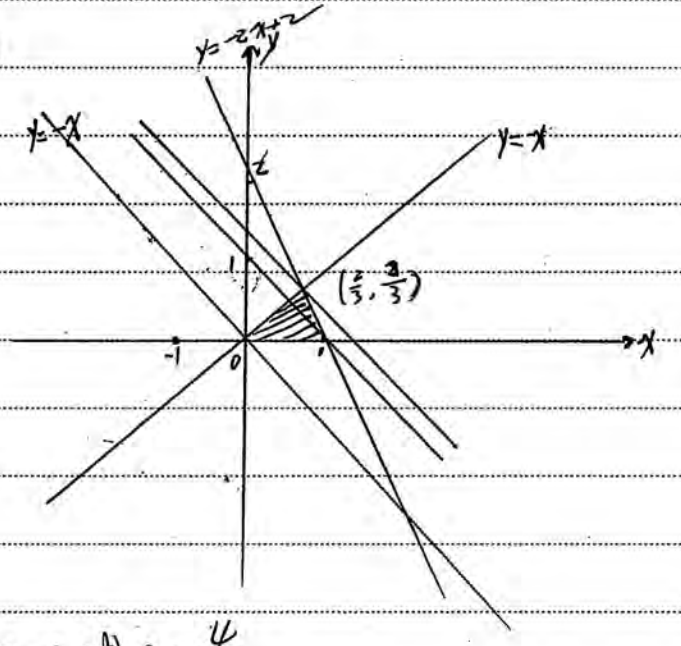


$-x-y\leq 1$

$\therefore\ y\geq -x-1$

(4) $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ 2x+y\leq 2 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq a \end{cases}$ 表示区域为三角形，求a范围

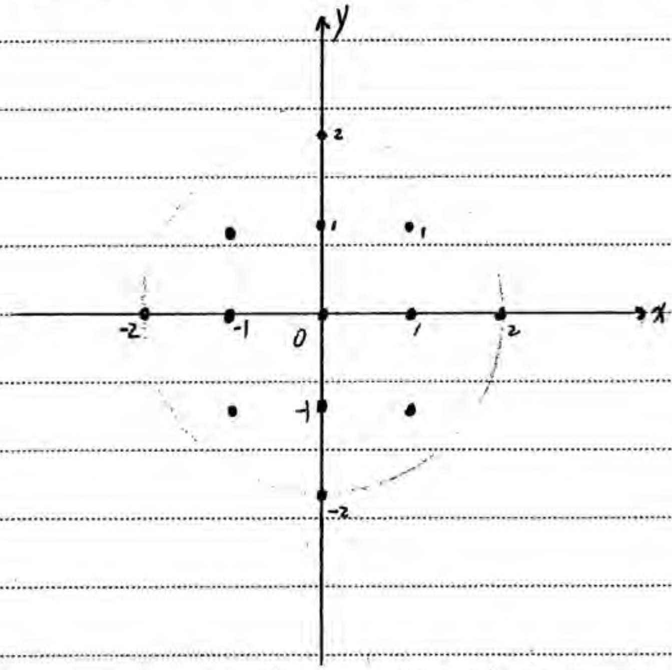
解: $\begin{cases} y\leq x \\ y\leq -2x+2 \\ y\geq 0 \\ y\leq -x+a \end{cases}$



$\therefore\ 0<a\leq 1$ 或 $a\geq \frac{4}{3}$

例2：平面区域内整点个数问题

(1) 平面区域 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ 内有13个整点。



(2) 不等式 $|x|+|y| \le 3$ 表示区域内整点 25 个

① $x \ge 0$，$y \ge 0$。

$y \le 3-x$

② $x \ge 0$，$y < 0$

$x-y \le 3$

$y \ge x-3$

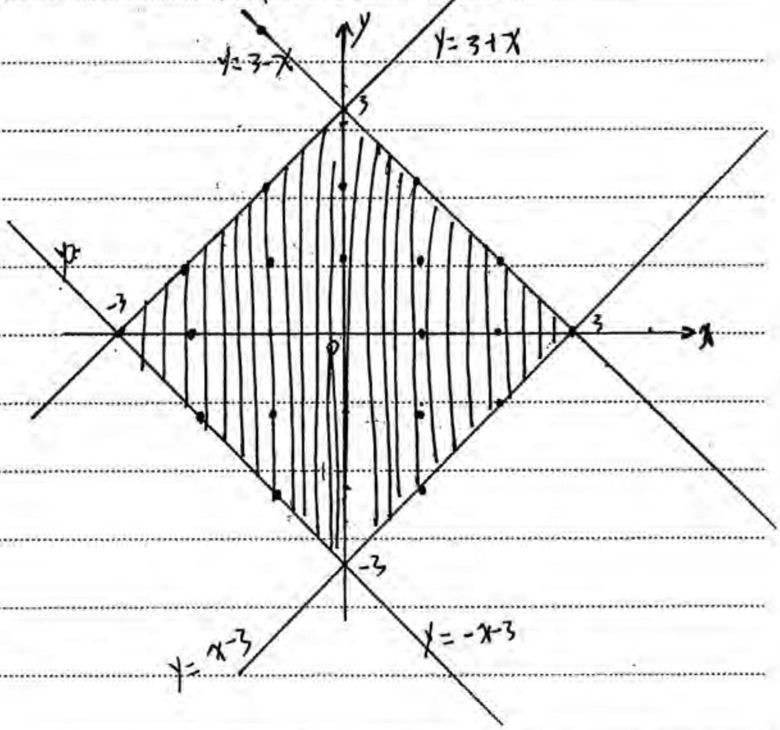
③ $x < 0$，$y > 0$

$-x+y \le 3$

$y \le 3+x$

④ $x < 0$，$y < 0$

$-x-y \le 3$

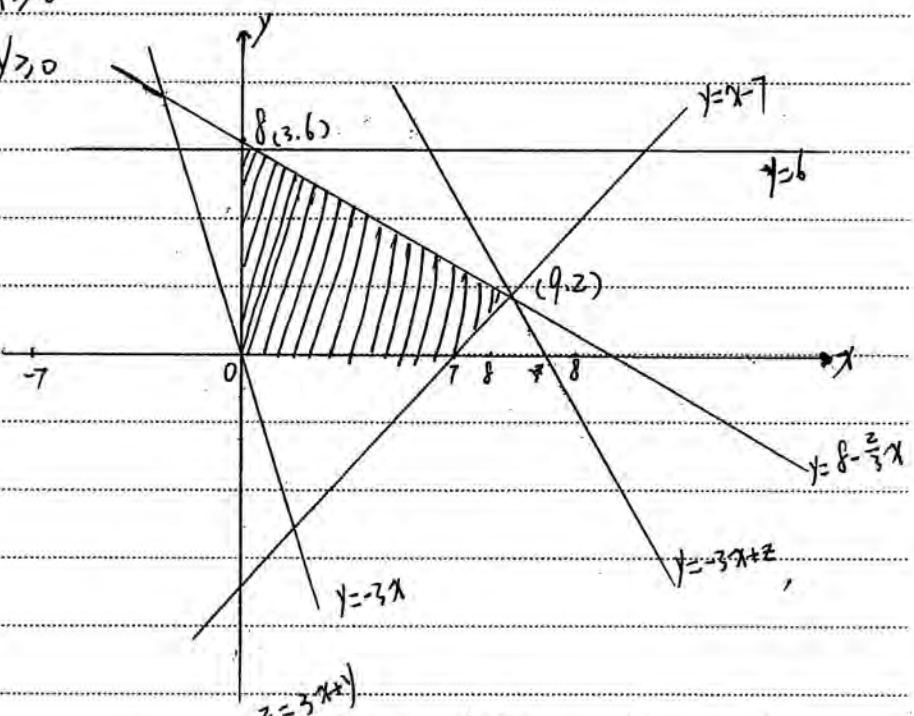


$\therefore y \geq -x-3$

例3. 求目标函数最值问题

(1) x, y 满足 $\begin{cases} 2x+3y \leq 24 \\ x-y \leq 7 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$，求 $z=3x+y$ 最大值

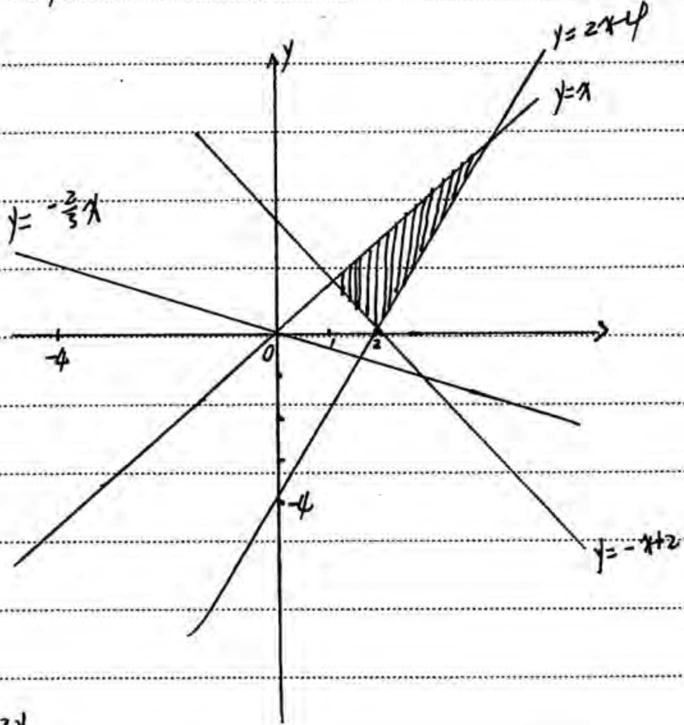
解: $\begin{cases} y \leq 8-\frac{2}{3}x \\ y \geq x-7 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



$\therefore y=-3x+z$ $\quad z_{max}=29$

(2) x, y 满足 $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ 2x-y \leq 4 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$，求 $2x+3y$ 最小值

解：$\begin{cases} y \geq -x+2 \\ y \geq 2x-4 \\ y \leq x \end{cases}$



设 $z = 2x+3y$

$\therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{z}{3}$

$\therefore 0 = -\frac{2}{3} \times 2 + \frac{z}{3}$

$\therefore z_{min} = -4$

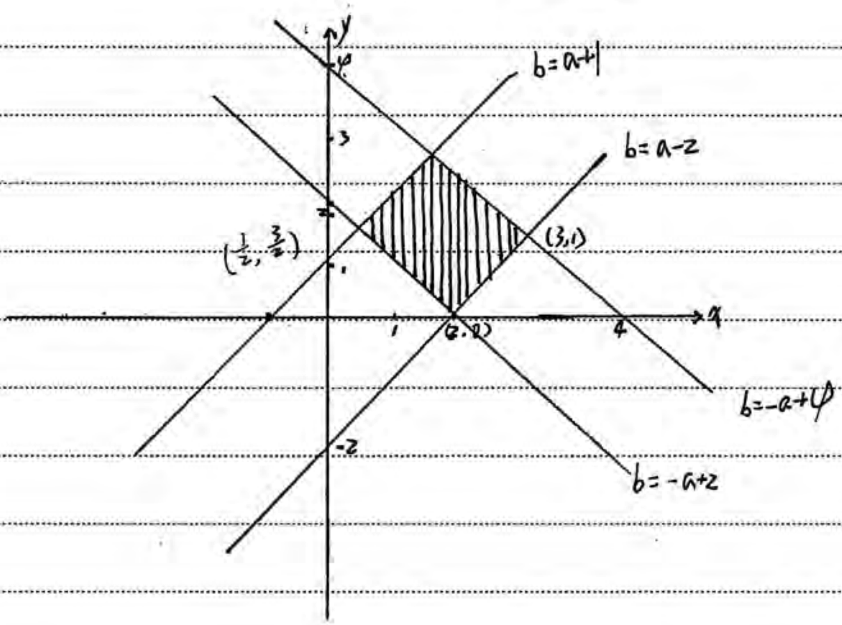
(3) $f(x)=ax^2+bx$. 且 $-1\le f(-1)\le 2$, $2\le f(1)\le 4$. 求 $f(-2)$ 范围

解: $f(-1)=a-b$ 设 $y_1=a-b$

$f(1)=a+b$ $y_2=a+b$

$f(-2)=4a-2b$ $y_3=4a-2b$

$\therefore \begin{cases} -1\le a-b\le 2 \\ 2\le a+b\le 4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} b\le a+1 \\ b\ge a-2 \\ b\ge -a+2 \\ b\le -a+4 \end{cases}$



设 $z=4a-2b$

$\therefore b=2a-\frac{z}{2}$

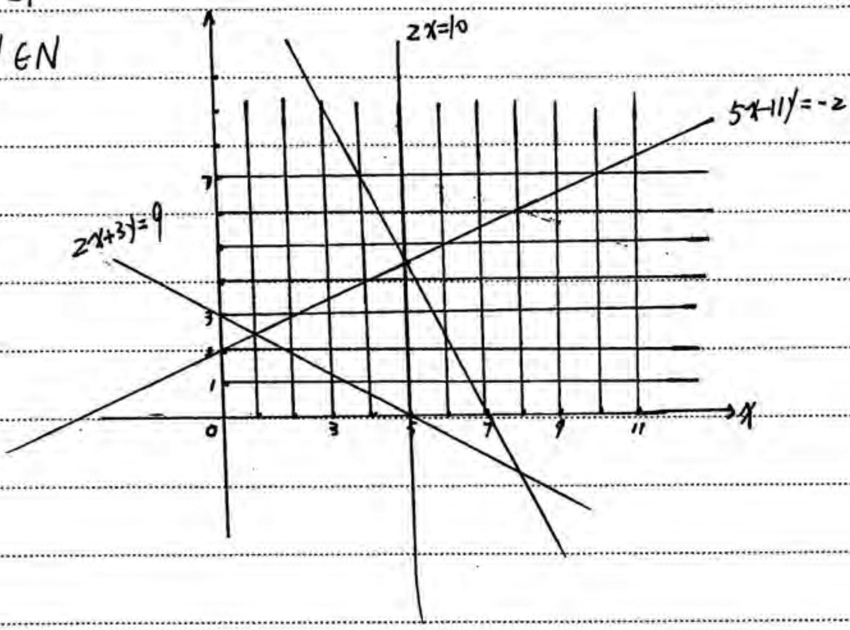
$\therefore \frac{3}{2}=2\times\frac{1}{2}-\frac{z}{2}$ $\therefore z=-1$

$\therefore 1=2\times 3-\frac{z}{2}$ $\therefore z=10$

$\therefore -1\le f(-2)\le 10$

例4. x, y 满足 $\begin{cases} 5x-11y \geq -22 \\ 2x+3y \geq 9 \\ 2x \leq 11 \Rightarrow 2x \leq 10 \\ x, y \in N \end{cases}$，求 $z=10x+10y$ 的最大值

解：$\begin{cases} y \leq \frac{5}{11}x+2 \\ y \geq -\frac{2}{3}x+3 \\ 2x \leq 10 \\ x, y \in N \end{cases}$



$z = 10x+10y$

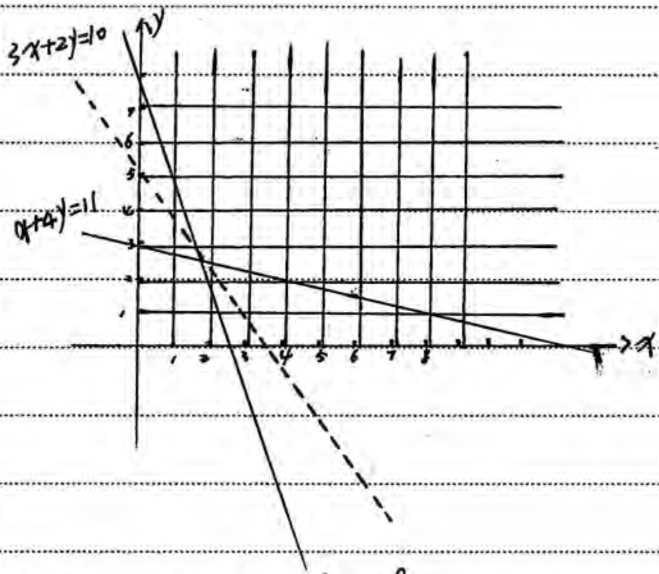
$\therefore y = -x + \frac{z}{10}$

$\therefore x=5$，$y=4$

$\therefore z_{max} = 90$

(2) x, y 满足 $\begin{cases} 3x+2y<10 \\ x+4y\leq 11 \\ x>0 \quad (x\in Z) \\ y>0 \quad (y\in Z) \end{cases}$ ，求 $S=5x+4y$ 的最大值及最优解

解: $\begin{cases} y<-\frac{3}{2}x+5 \\ y\leq -\frac{1}{4}x+\frac{11}{4} \\ x>0 \quad (x\in Z) \\ y>0 \quad (y\in Z) \end{cases}$



$S=5x+4y \quad \therefore y=-\frac{5}{4}x+\frac{S}{4}$

$\therefore$ 最优解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (2, 2) 取不到

$S_{max}=14$

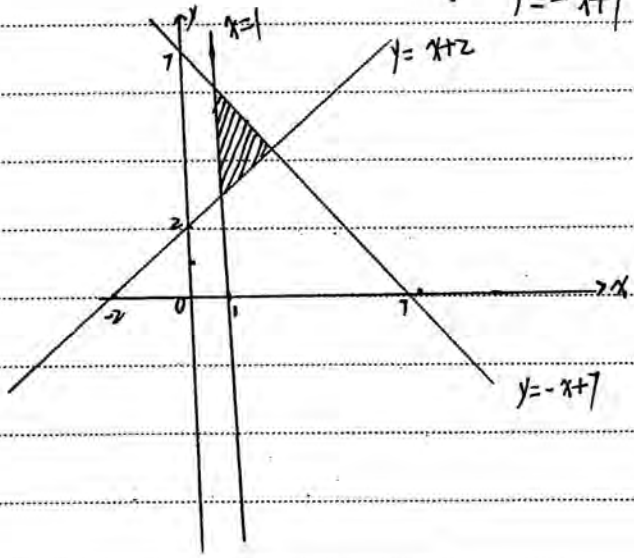
例5. 非线性目标函数最值问题

(1) x, y 满足 $\begin{cases} x-y+2\le 0 \\ x\ge 1 \\ x+y-7\le 0 \end{cases}$，求 $\frac{y}{x}$ 的取值范围

设 $\frac{y}{x}=k$

$\therefore y=kx$

$\begin{cases} y\ge x+2 \\ x\ge 1 \\ y\le -x+7 \end{cases}$



① $\therefore 6=k\times 1$

$\therefore k=6$

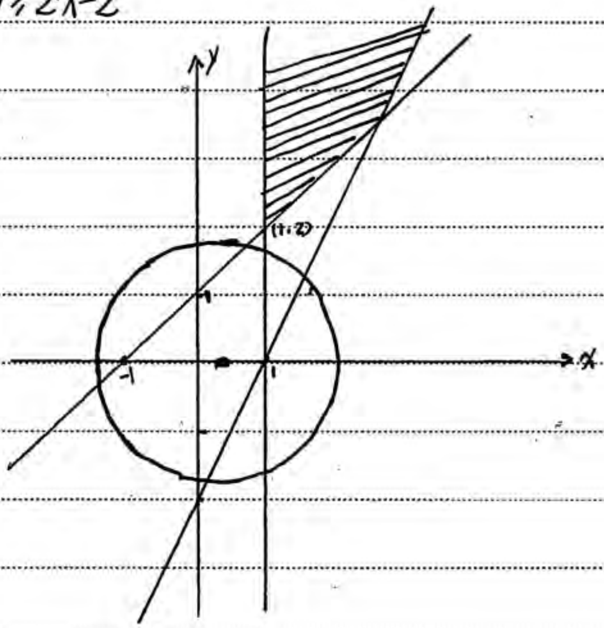
② $\frac{9}{2}=\frac{5}{2}k$

$\therefore k=\frac{9}{5}$

$\therefore \frac{y}{x}\in\left[\frac{9}{5}, 6\right]$

(2) x.y 满足 $\begin{cases} x\geq 1 \\ x-y+1\leq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \end{cases}$，求 x^2+y^2 最小值

$\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq x+1 \\ y\geq 2x-2 \end{cases}$

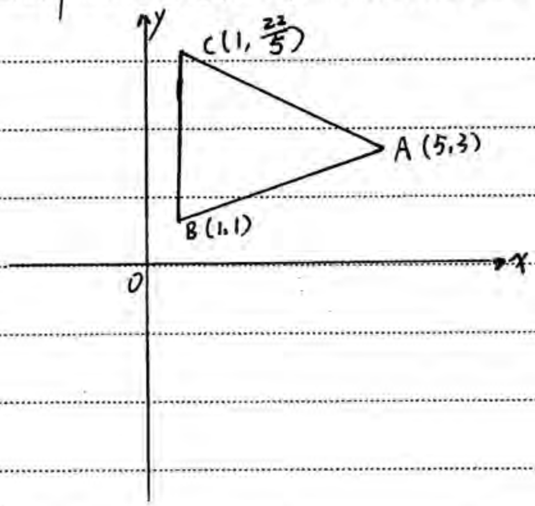


$\therefore\ r=\sqrt{5}$

$\therefore\ x^2+y^2$ 最小值为 5

例6. 已知最优解：求参数

(1) 如图区域，目标函数 $z=mx+y\ (m>0)$，在区域内取得最大值的最优解有无数个，则 m 的值为 $\frac{7}{20}$

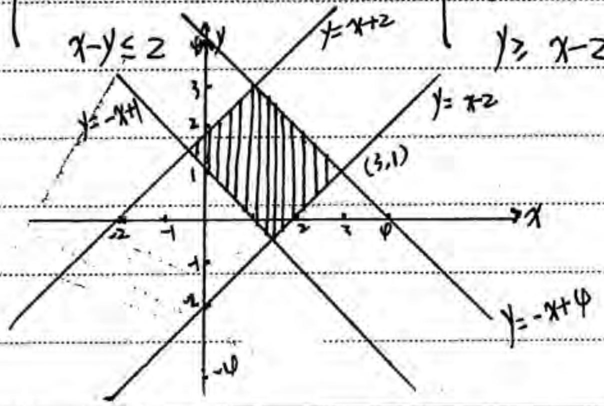


$-m=k_{AC}$

$\therefore m=\frac{7}{20}$

(2) x,y 满足 $\begin{cases}1\le x+y\le 4\\ -2\le x-y\le 2\end{cases}$，目标 $z=ax+y\quad(a>0)$，仅在点 $(3,1)$ 处取最大值，求 a 范围。

$$\begin{cases}x+y\ge 1\\ x+y\le 4\\ x-y\ge -2\\ x-y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\ge -x+1\\ y\le -x+4\\ y\le x+2\\ y\ge x-2\end{cases}$$



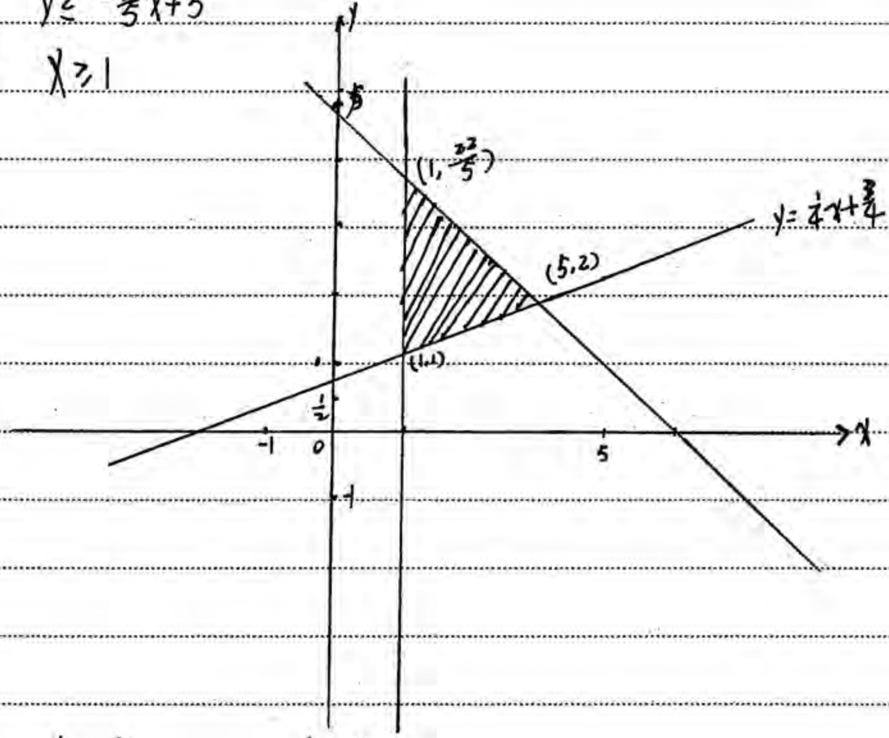
$y=-ax+z$

$|-a|>|-1|$

$\therefore a>1$

(3) x, y 满足 $\begin{cases} x-4y+3\leq 0 \\ 3x+5y-25\leq 0 \\ x\geq 1 \end{cases}$，目标 $z=kx+y$ 的最大值为12，最小值为3，求k值

$\begin{cases} y\geq \frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \\ y\leq -\frac{3}{5}x+5 \\ x\geq 1 \end{cases}$



$z=kx+y$，$\therefore y=-kx+z$

$\begin{cases} k>0 \\ k>\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow k>\frac{3}{5}$

$\therefore \begin{cases} 5k+2=12 \\ k+1=3 \end{cases} \Rightarrow k=2$

圆

一. 圆的方程

1. 标准方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2. 一般方程: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$

3. 参数方程: $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)

4. 圆过原点: ① $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

② $x^2+y^2+Dx+Ey=0$

5. 以 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 为圆直径端点的圆

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

6. 圆系

(1) 与 C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 同心的圆为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F'=0$

$(D^2+E^2-4F'>0)$

(2) 过直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$

(3) 过两圆交点 C_1: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$, C_2: $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$

二. 点和圆的位置关系

$P(x_0,y_0)$ 圆 C: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

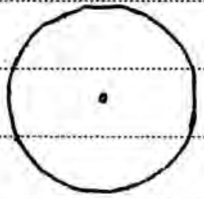
三、直线和圆的位置关系

1、代数法

联立直线和圆，判断Δ

2. 几何法

d 和 r 的关系



四、求弦長

1. 几何

$|AB| = 2\sqrt{r^2-d^2}$

2. 弦长公式

$|AB| = \sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|$

五、圆的切线问题

1. 圆C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，求过圆上一点(x_0,y_0)的切线方程.

$(y-y_0)(y_0-b)+(x-x_0)(x_0-a)=0$ 或 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$

2. 过$P(4,5)$作圆$(x-2)^2+y^2=4$的切线，求切线方程及切线长.

解：① 设l：$y-5=k(x-4)$

$kx-y+(5-4k)=0$

$d=\dfrac{|2k-0+5-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$.　$\therefore k=\frac{21}{20}$

$\therefore$ l：$y=\frac{21}{20}x+\frac{4}{5}$

② 当k不存在时

切线为 $x=4$.

∴ 切线长为 5

3. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$, 切线斜率为 k, 切线方程为

$y=kx\pm r\cdot\sqrt{1+k^2}$

六. 两圆的位置关系

1. 判断两圆位置关系方法

相离	外切	相交	内切	内含
$\lvert OO_1\rvert>r_1+r_2$	$\lvert OO_1\rvert=r_1+r_2$	$\lvert r_1-r_2\rvert<\lvert OO_1\rvert<r_1+r_2$	$\lvert OO_1\rvert=\lvert r_1-r_2\rvert$	$0\le\lvert OO_1\rvert<\lvert r_1-r_2\rvert$

2. 圆 C_1: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

圆 C_2: $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

① 相交弦所在直线方程: $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ — C_1与C_2相交时

② C_1与C_2相外切时: $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ 表示公切线(中间那条)所在直线方程.

例: 求 C_1: $x^2+y^2=4$ 和 C_2: $(x-3)^2+y^2=1$ 公切线方程

① $x=2$

② 利用相似切线与x轴交于 $(6,0)$

∴ 设 l: $y=k(x-6)$

∴ $kx-y-6k=0$

∴ $\frac{|-6k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

∴ $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴ $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x-6$

③ C_1与C_2相离时，$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ 表示到两圆切线长相等的轨迹。

④ 若 $r_1=r_2$，$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ 表示两圆对称直线

例1：直线与圆的关系

(1) 曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 与 $y=k(x-2)+4$ 交于不同两点，求k的范围.

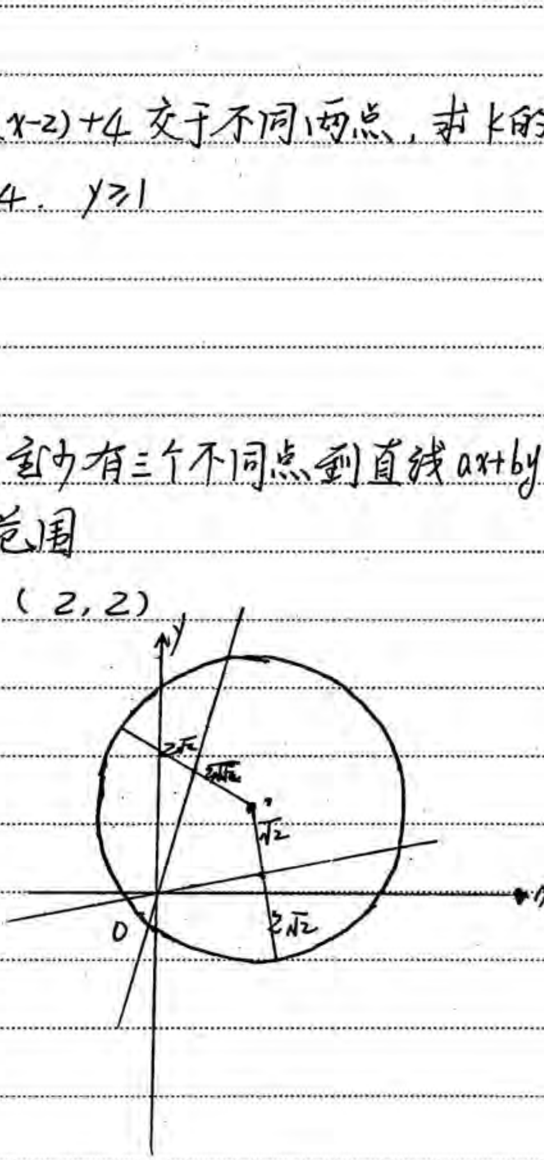
曲线：$x^2+(y-1)^2=4$，$y\geq1$

$$\begin{cases} k>\frac{5}{12} \\ k\leq\frac{3}{4} \end{cases}$$

(2) 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同点到直线 $ax+by=0$ 距离为$2\sqrt{2}$，求直线斜率范围

解：$(x-2)^2+(y-2)^2=18$　$(2,2)$

$$\frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\sqrt{2}$$



例2： 切线问题

(1) 求过圆 $x^2+y^2-2x+4y-15=0$ 上一点 $P(-1,2)$ 的切线方程.

$(x-1)^2+(y+2)^2=20$ $(1,-2)$

设切线 l: $y-2=k(x+1)$

$\therefore kx-y+(k+2)=0$

$d=\dfrac{|k+2+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{5}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(2) 由直线 $y=x+1$ 上一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线. 求切线长的最小值

过圆心作直线垂线

$d_{min}=\sqrt{7}$

例3: 圆中的最值问题

(1) x, y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$, 求 $\frac{y}{x}$ 最大值

设 $\frac{y}{x}=k$ $y=kx$

$\therefore k_{max}=k_{切线}=\sqrt{3}$

$\therefore \frac{y}{x}$ 最大值为 $\sqrt{3}$

(2) 求 $y=\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta+2}$ 最值

$y_{min}=-\frac{4}{3}$

$y_{max}=0$

(3) 已知 $P(a,a)$ $(a\in R)$，点M是圆 O_1: $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ 上的动点

点N是圆O_2: $(x-2)^2+y^2=$ 上的动点，求 $|PN|-|PM|$ 的最大值　$O_1(0,1)$　$O_2(2,0)$

$|PO_1|=\sqrt{a^2+(a-1)^2}$　　$|PM|=\sqrt{a^2+(a-1)^2}-\frac{1}{2}$

$|PO_2|=\sqrt{(a-2)^2+a^2}$　　$|PN|=\sqrt{(a-2)^2+a^2}+\frac{1}{2}$

$\therefore |PN|-|PM|=\sqrt{(a-2)^2+a^2}-\sqrt{a^2+(a-1)^2}+1=|PO_2|-|PO_1|+1=2$

椭圆及其标准方程

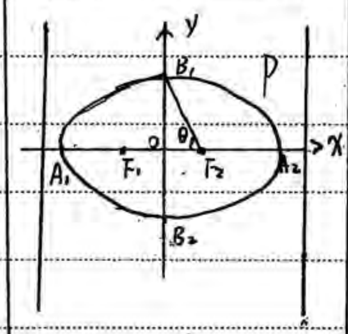
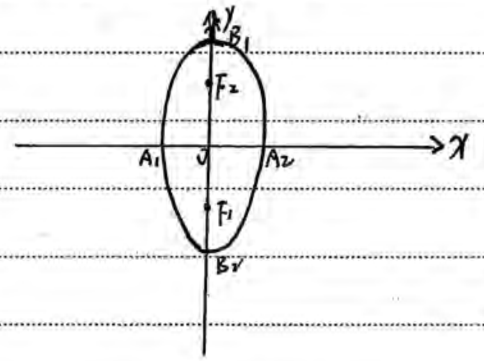
一、椭圆定义：

平面内到两个定点 F_1、F_2 距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹，F_1F_2为焦点，$|F_1F_2|$为焦距

第二定义：平面内到定点距离与到定直线距离比为常数 e $(0<e<1)$ 的点的轨迹（定点为焦点，定直线为准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$）① F_1不在定直线上

② 同侧焦点与同侧准线

二、椭圆图象及性质

方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$
		

顶点坐标	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$ $B_1(0,b)$ $B_2(0,-b)$	$A_1(-b,0)$ $A_2(b,0)$ $B_1(0,a)$ $B_2(0,-a)$
取值范围	$-b\le y\le b$, $-a\le x\le a$	$-b\le x\le b$, $-a\le y\le a$
焦点坐标	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
离心率	$a^2=b^2+c^2$, ① $e=\frac{a}{c}\in(0,1)$ ② $e=\cos\theta$ e↑扁；e↓圆	
焦半径	$\lvert PF_1\rvert=a+ex_0$ $\lvert PF_2\rvert=a-ex_0$	$\lvert PF_1\rvert=a+ey_0$ $\lvert PF_2\rvert=a-ey_0$

三. 参数方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

例1: 求椭圆方程

(1) 离心率为$\frac{1}{2}$, 長轴長为8. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 或 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

(2) 与椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 同焦点且过 $Q(2,-3)$ $\frac{y^2}{15}+\frac{x^2}{10}=1$

(3) $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ 为焦点, P在椭圆上, $PF_1\perp PF_2$. $\angle F_1PF_2$ 平分线交F_1F_2 于 $M(1,0)$. 求椭圆方程

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1M|}{|F_2M|} \Rightarrow \text{角分线定理}$$

$$\frac{5x^2}{8}+\frac{5y^2}{36}=1$$

(4) $\triangle ABC$ 两顶点 $B(0,6)$ $C(0,-6)$ 且 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{4}{9}$, 求A点轨迹方程.

$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$ ~~$(y\neq\pm6)$~~

(5) A.B为定点，$|AB|=2$，动点M到A距离为4，线段MB中垂线l交MA于点P，求P轨迹方程

$|PB|=|PM|$ ∴ $|PB|+|PA|=|MA|=4>|AB|$

∴ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

例2. 参数方程

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$ 上点P到直线l：$3x-2y-16=0$ 的最短距离为 $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

(2) ~~若~~ x,y满足 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$，求 $V=y-3x$ 和 $W=x^2+y^2$ 最大值

$V_{max}=13$ $V_{min}=25$

(3) 求过点 $A(0,1)$ 作直线l被椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 截得弦长最大值

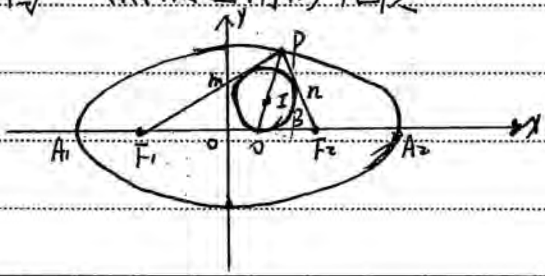
$\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(4) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，右顶点A，P在椭圆上，若 $\angle OPA=90^\circ$，求离心率e范围 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$

(5) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一动点P在第一象限，A为长轴右端点，B为短轴上端点，求 $S_{\triangle AOB}$ 最大值及此时P点坐标.

$S_{\triangle APB}$最大值为 $\frac{\sqrt{2}ab}{2}$. $P(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b)$

四. 焦点三角形性质



(1) $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$ (θ为$\angle F_1PF_2$)

证: $m+n=2a$

$\cos\theta=\frac{m^2+n^2-4c^2}{2mn}\Rightarrow mn=?$

$S=\frac{1}{2}mn\sin\theta=$

(2) P处于短轴端点时，∠F₁PF₂最大面积或余弦定理证

P处于短轴端点时，∠A₁PA最大(到角公式证明)

(3) $e=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

证：$\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin\beta}=\frac{2c}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}=\frac{n+m=2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$ $\therefore\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

(4) $e=\frac{IM}{PI}$

证：$\frac{PF_1}{F_1M}=\frac{PF_2}{F_2M}=\frac{PI}{IM}$

$\therefore\frac{PI}{IM}=\frac{PF_1+PF_2}{F_1M+F_2M}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}$ $\therefore\frac{c}{a}=\frac{IM}{PI}$

例. 求离心率

(1) 过 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 焦点F作垂直于x轴的弦与原点O构成等腰直角三角形，求e. , $e=\frac{\sqrt5-1}{2}$

(2) 从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上一点M作x轴垂线，恰好过左焦点F且長轴端点A与短轴焦点B连线 AB∥OM. 求e

$e=\frac{\sqrt2}{2}$

(3) F_1F_2为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 焦点，过F_2直线交椭圆于P，Q两点且 $PF_1\perp PQ$，

$|PF_1|=|PQ|$，求e. $e^2=9-6\sqrt2$， $\therefore e=\sqrt6-\sqrt3$

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>1)$ 長轴两端点为A.B，如果椭圆上存在一点Q，使$\angle AQB=120^\circ$. 求e范围 $\frac{\sqrt6}{3}\le e<1$

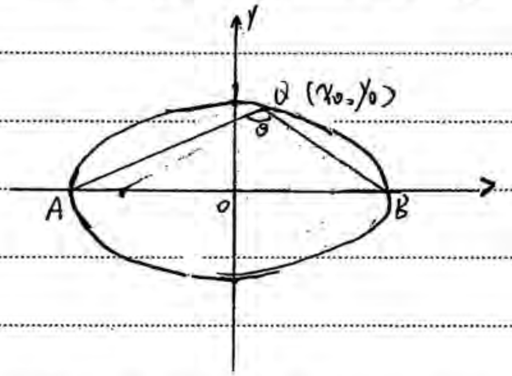
(5) $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 焦点，P是以F_1F_2为直径的圆与椭圆的一个交点，若$\angle PF_1F_2=5\angle PF_2F_1$ 求e. $e=\frac{\sqrt6}{3}$

(4) $Q(x_0, y_0)$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$\tan\theta=\frac{k_{QB}-k_{QA}}{k_{QB}\cdot k_{QA}}$

$\Rightarrow y_0=\frac{2ab^2}{\sqrt{3}c^2}\in(0,b]$ $\frac{2ab^2}{\sqrt{3}c^2}\le b$

$\therefore \frac{2ab}{\sqrt{3}c^2}\le 1$



$\therefore \frac{2a\cdot\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{3}c^2}\le 1$

$\therefore e\in[\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

五、点与椭圆位置关系

$P(x_0, y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 关系

① $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$ P在椭圆C

② $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1 \Leftrightarrow$ P在椭圆内

③ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1 \Leftrightarrow$ P在椭圆外

六、直线与椭圆位置关系

1、判断关系：联立直线与椭圆

$\Delta=0$：相切 $\Delta>0$ 相交 $\Delta<0$ 相离

例：(1) 直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|$ $(k\ne0)$ 公共点个数为4个.

解：$9k^2|x|^2+(2k)^2=18k^2|x|$

$\therefore 9|x|^2-18|x|+4=0$

$\Delta=324-144=180$

$|x|=\frac{18\pm6\sqrt{5}}{18}$ $\therefore |x|$ 有2个解. $\therefore x$ 有4个值

(2) 对于任意k，直线l: $y=kx+b$ 与椭圆C: $\begin{cases} x=\sqrt{3}+2\cos\theta \\ y=1+4\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$

恒有公共点，则b的范围为 $[-1,3]$

解: C: $\dfrac{(x-\sqrt{3})^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$ 过 $(0,-1)$ $(0,3)$ 画图

2. 弦长公式: $|AB|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|$

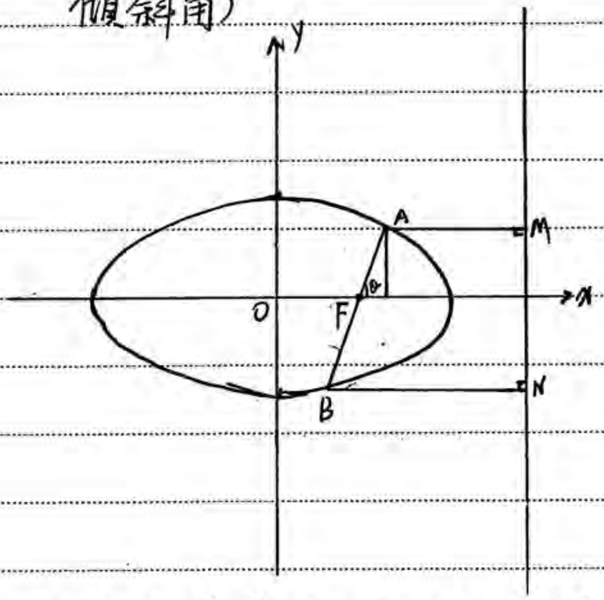
$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

3. 求焦点弦公式

焦点与准线的距离: 即 $\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$

(1) 弦长公式

(2) $|AB|=\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$ (e为离心率，p为焦准距，θ为AB直线倾斜角)



$|AF|=e\cdot|AM|=e\cdot(p-|AF|\cdot\cos\theta)$

$\therefore |AF|=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$ ※

$|BF|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$

$\therefore |AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$

例 (1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线与椭圆交于 A.B. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$

求 k. $k=\sqrt{2}$

解：$AF=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$ $BF=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$

$\therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}=3\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\therefore k=\tan\theta=\sqrt{2}$

(3) 通径

$|AB|=\frac{2b^2}{a}$

4. 中点弦问题 (点差法)

A.B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点，AB 中点为 M. 则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$

例 (1) 椭圆焦点为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ $F_2(2\sqrt{2},0)$，長轴为6. $y=x+2$ 交椭圆于 A.B. 求 AB 中点坐标 $(-\frac{9}{5},\frac{1}{5})$

(2) 斜率为1的直線 L 过 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 右焦点交椭圆于不同点 A.B. 求 $|AB|$

$|AB|=\frac{8}{5}$

(3) 已知中心在原点.焦点在坐标轴上的椭圆与直线 $x+y=1$ 交于 A.B 两点. 且 $|AB|=2\sqrt{2}$. 连结 AB 中点与原点的直线斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求椭圆方程.

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=1$$

设 $Ax^2+By^2=1$ $(A>0,\ B>0,\ 且\ A\neq B)$

$$\begin{cases} Ax^2+By^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (A+B)x^2-2Bx+(B-1)=0$$

$2\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}=\frac{1-\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}$

(4) 椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 左焦点为F. O为原点

(I) 求过O点.F点且与椭圆左准线相切的圆方程

$(x-\frac{1}{2})^2+(y\pm\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$

(II) 设过点F的直线交椭圆于A,B两点. 并AB中点在 $x+y=0$ 上. 求AB方程

AB: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 或

例: 椭圆中最值问题

(1) P为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 短轴一个端点, Q且为椭圆上动点, 求 $|PQ|$ 最大值 $|PQ|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(2) B在圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 上移动, Q在 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 上移动, 求 $|PQ|$ 最大最小值

最小: 2 最大: $3\sqrt{3}+1$

(3) AB为过椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 中心的弦, F为焦点, 求 $S_{\triangle FAB}$ 最大值. $S_{\triangle FAB}$ 最大为12

(4) 动点 $P(x,y)$ 在 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上. 若 $A(3,0)$, M点满足 $|\vec{AM}|=1$, $\vec{PM}\cdot\vec{AM}=0$. 求 $|\vec{PM}|$ 最小值, $\sqrt{3}$

(5) 已知 $A(1,1)$. 动点P在 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上. $F(\sqrt{7},0)$

(I) 求 $|PA|-|PF|$ 最大值 $\sqrt{9-2\sqrt{7}}$

(Ⅱ) 求 $|PA|+\frac{4}{\sqrt{7}}|PF|$ 最小值 $\frac{16-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$（第二定义）

七、直线与椭圆相切

1. 大题中：设直线联立：$\Delta=0$

2. 结论：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(1) 斜率为k的切线：$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$

(2) 过椭圆上一点 $P'(x_0,y_0)$ 切线，$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}=1$

※ (3) 直线 $Ax+By+C=0$ 与椭圆相切 $A^2a^2+B^2b^2=C^2$

例 (1) 求与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 共焦点且与直线 $l: x+y+13=0$ 相切的椭圆方程

$\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{80}=1$ $\frac{x^2}{12+\lambda}+\frac{y^2}{3+\lambda}=1$ $(\lambda>-3)$

(2) B在椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，$A(4,0)$ $B(0,3)$，使 $S_{\triangle PAB}=6(\sqrt{2}-1)$ 的P点有3

双曲线及其标准方程

一、定义：

平面上到定点 F_1F_2 距离之差的绝对值等于常数（$<|F_1F_2|$）的轨迹叫做双曲线。

常数 $=|F_1F_2|$：为两条射线

常数 $>|F_1F_2|$：无轨迹

二、标准方程 $c^2=a^2+b^2$

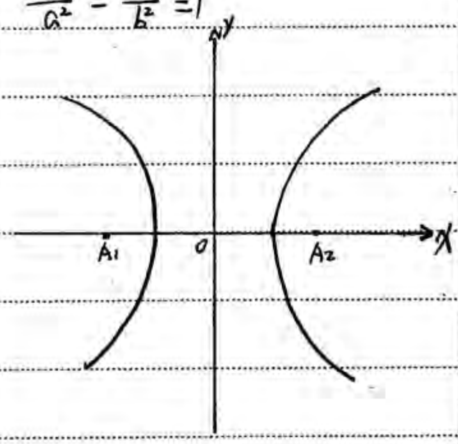
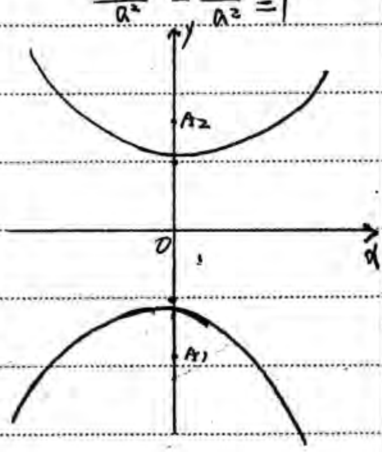
1. 焦点在x轴：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$

2. 焦点在y轴：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$

3. 焦点在坐标轴：$mx^2+ny^2=1$ $(mn<0)$

三. 第二定义

平面上到定点F距离与到定直线l距离之比为常数 $e\ (e>1)$ 的点的轨迹是双曲线 定点不在定直线上. 定点为焦点. 定直线为准线.

方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$
图形		
顶点	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$	
焦点		
离心率	$e=\frac{c}{a}$ $(e>1)$ e↑ 开口越大	
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$ $\left(\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}\right)$	$y=\pm\frac{a}{b}x$ $\left(\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{b^2}\right)$
焦半径	$\lvert PF_1\rvert=\lvert ex_0+a\rvert$ $\lvert PF_2\rvert=\lvert ex_0-a\rvert$ P在右支上: $\lvert PF_1\rvert=ex_0+a$ $\lvert PF_2\rvert=ex_0-a$ P在左支上: $\lvert PF_1\rvert=-(ex_0+a)$ $\lvert PF_2\rvert=-(ex_0-a)$	$\lvert PF_1\rvert=\lvert ey_0+a\rvert$ $\lvert PF_2\rvert=\lvert ey_0-a\rvert$ P在右支上: ~~P~~ P在左支上:

$c^2=a^2+b^2$

五、焦点三角形性质

1、$S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \cdot \cot\frac{\theta}{2}$ （θ 为 $\angle F_1PF_2$）

2、$\angle PF_1F_2 = \alpha$，$\angle PF_2F_1 = \beta$，则 $e = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{|\sin\alpha - \sin\beta|}$

六、点与双曲线的位置关系

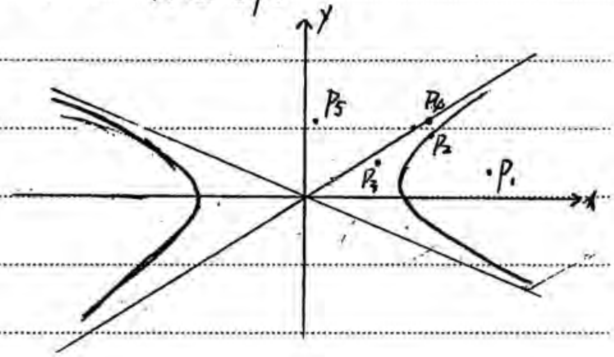
P_1：$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$

P_2：$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

P_3：$0 < \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$

P_4：$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$

P_5：$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 0$



例1：求标准方程：

(1) 双曲线焦点 $(\sqrt{6},0)$，过点 $(-5,2)$　　$\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$

(2) 双曲线实轴长为 $4\sqrt{3}$，且与 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 有公共焦点　$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$

(3) 双曲线过 $P(3, 2\sqrt{7})$，$Q(-6\sqrt{2}, 7)$　$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1$

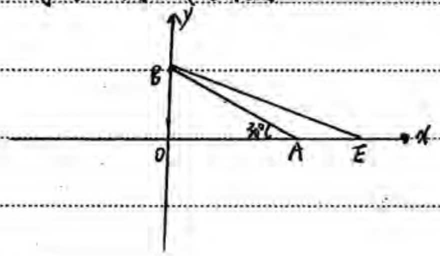
(4) 求过 $A(5,0)$ 且与圆 $(x+5)^2+y^2=36$ 外切的圆圆心轨迹方程

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ （$x \geq 3$）或"x轴双曲线右支）

(5) OA 为双曲线实半轴，OB是虚半轴，F为焦点，$\angle BAO = 30°$，

$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}(6-3\sqrt{3})$

求双曲线方程



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

(6) 已知 $\alpha\in[0,\pi)$，讨论 α 值变化时，方程 $x^2\sin\alpha+y^2\cdot\cos\alpha=1$ 表示的曲线形状

解： $\sin\alpha\in[0,1]$， $\cos\alpha\in(-1,1]$

① $\alpha=0$ 时，$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=1$，∴ $y^2=1$ 为两条平行于x轴的直线

② $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，∴ 为焦点在x轴 椭圆 $\alpha=\frac{\pi}{4}$：圆

③ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时：$\sin\alpha=1$，$\cos\alpha=0$，∴ $x^2=1$ 为两条平行于y轴的直线

④ $\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi)$：$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$ ∴ 为双曲线

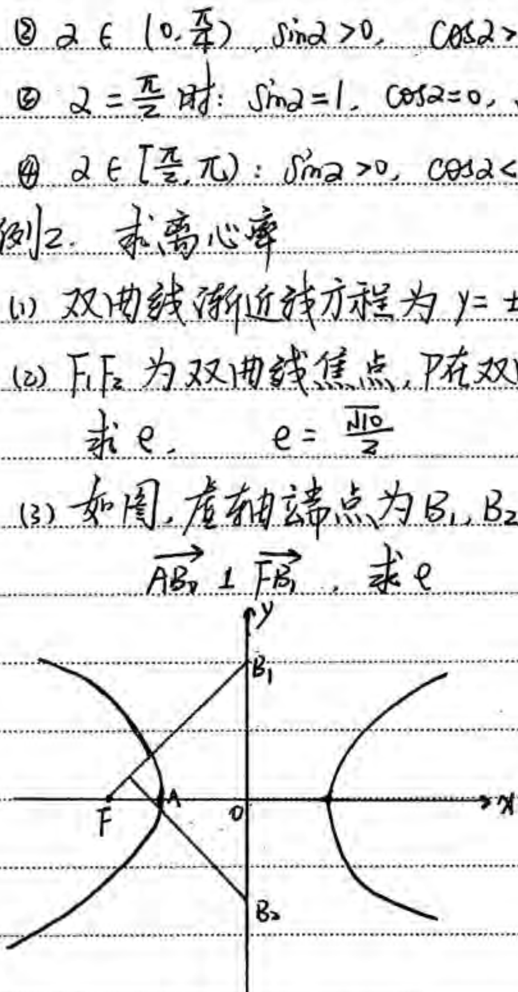
例2. 求离心率

(1) 双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，求 e $e=\frac{5}{4}$ 或 $\frac{5}{3}$

(2) F_1F_2 为双曲线焦点，P在双曲线上，$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_2P}$，$|\overrightarrow{F_1P}|=3|\overrightarrow{F_2P}|$

求 e。 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$

(3) 如图，虚轴端点为 B_1、B_2，右顶点为A，左焦点为F，若 $\overrightarrow{AB_2}\perp\overrightarrow{FB_1}$，求 e



$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(4) 一双共轭双曲线离心率分别为 e_1、e_2 则 e_1、e_2 关系为

$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$

(5) 过 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的右焦点F作渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线，垂足为M，交双曲线左、右支于A、B，求 e 范围

$e > \sqrt{2}$

$\left|-\frac{a}{b}\right| < \left|-\frac{b}{a}\right|$

(16) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为F，过F作倾斜角为60°的直线与双曲线右支有且只有一个交点，求e范围　　$e\in[2,+\infty)$

(17) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，求e

$e=\sqrt{5}$

七、直线与双曲线位置关系

1、联立直线与双曲线

$$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow (b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2-a^2b^2=0$$

(1) 若 $b^2-a^2k^2=0$ 即 $k=\pm\frac{b}{a}$ 时，$\begin{cases} m=0\text{ 时：无交点} \\ m\neq0\text{ 时：有1个公共点} \end{cases}$

(2) 若 $b^2-a^2k^2\neq0$
$\begin{cases} \Delta<0\text{：相离（无公共点）} \\ \Delta=0\text{ 相切（切线比渐近线陡）} \\ \Delta>0\text{ 相交}\begin{cases}\text{与一支相交于两点：}|k|>\frac{b}{a} \\ \text{与两支相交于两点：}|k|<\frac{b}{a}\end{cases} \end{cases}$

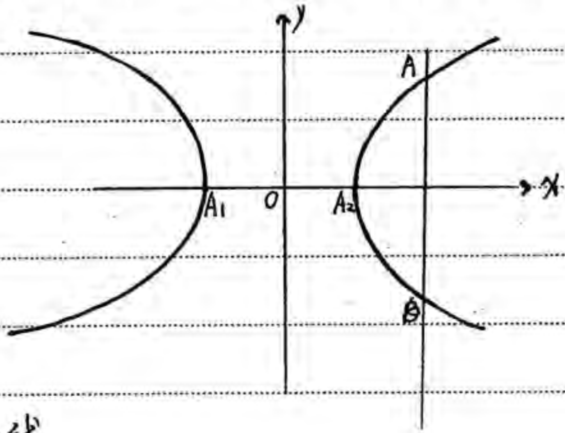
2、弦长公式

3、焦点弦求法

(1) 弦长公式

(2) $|AB|=\frac{2ep}{|1-e^2\cos^2\theta|}$

(3) 通径：$|AB|=\frac{2b^2}{a}$（不一定是焦点弦最小值，最小值可能为 $|A_1A_2|$）



4. 切线

(1) 斜率为k的双曲线切线：$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$

(2) 过双曲线上一点$P(x_0,y_0)$切线，$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

(3) 直线$Ax+By+C=0$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$相切，

$A^2a^2-B^2b^2=C^2$ 内切圆与x轴切点为双曲线顶点

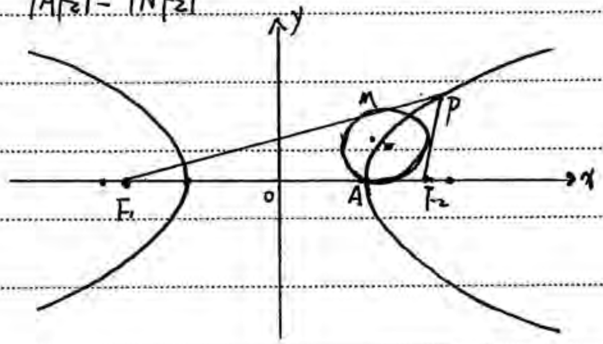
$|PM|=|PN|$ $|MF_1|=|AF_1|$ $|AF_2|=|NF_2|$

$\because |PF_1|-|PF_2|=2a$

$\therefore |MF_1|-|NF_2|=2a$

$\therefore |AF_1|-|AF_2|=2a$

$\therefore$ A在双曲线上



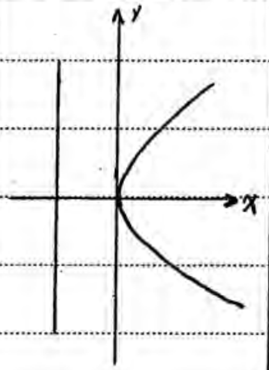
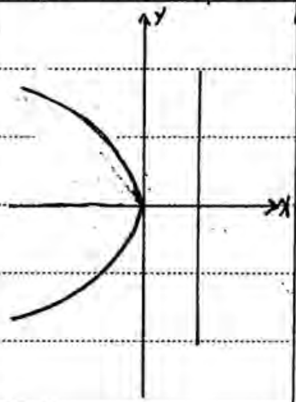
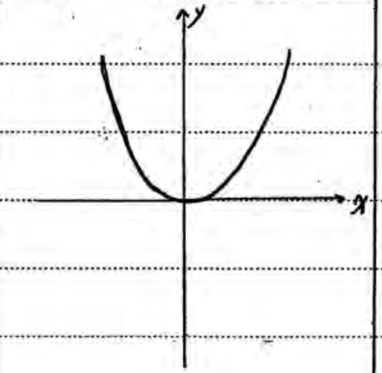
抛物线及其标准方向

一、定义：

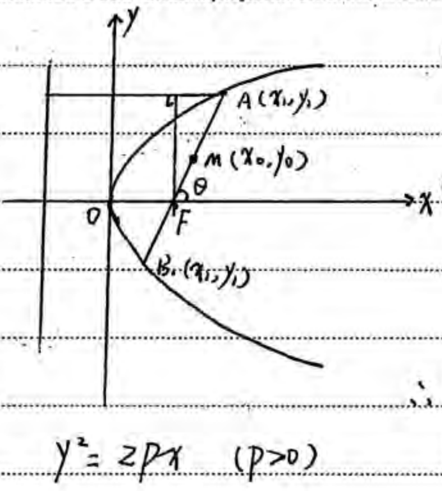
到定点F与到定直线l距离相等的点的轨迹是抛物线

定点F为焦点，直线l为准线

二、标准方程及几何性质

标准方程	$y^2=2px\ (p>0)$	$y^2=-2px\ (p>0)$	$x^2=2py\ (p>0)$
图形			
焦点坐标	$(\frac{p}{2},0)$	$(-\frac{p}{2},0)$	$(0,\frac{p}{2})$
范围	$x\geq 0,\ y\in R$	$x\leq 0,\ y\in R$	$x\in R,\ y\geq 0$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$
离心率	$e=1$		
焦半径	$\lvert PF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=-x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$

三、焦点弦求法



$y^2=2px\quad(p>0)$

(1) $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}$

$\therefore |AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p$

(2) $|AF|=p+|AF|\cdot\cos\theta$

$\therefore |AF|=\frac{p}{1-\cos\theta}$

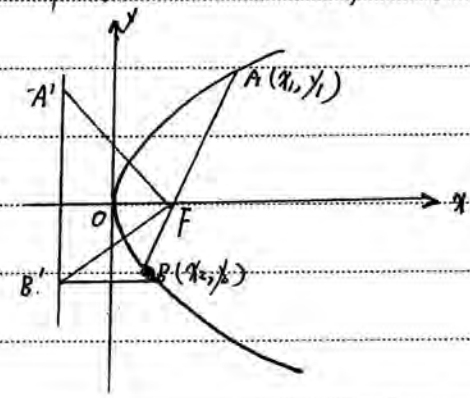
$|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta}$

$$\therefore\begin{cases}|AB|=\dfrac{2p}{1-\cos^2\theta}\\ \dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}\end{cases}$$

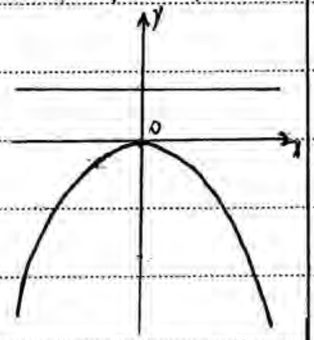
四. 焦点弦性质

1. 以AB为直径的圆与准线相切. 以AF为直径的圆与y轴相切

2. $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$



$x^2=-2py$ $(p>0)$



$(0, -\frac{p}{2})$

$x\in R$, $y\le 0$

$y=\frac{p}{2}$

$|PF|=-y_0+\frac{p}{2}$

3. $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases} y^2=2px \\ y=k(x-\frac{p}{2}) \end{cases}$$

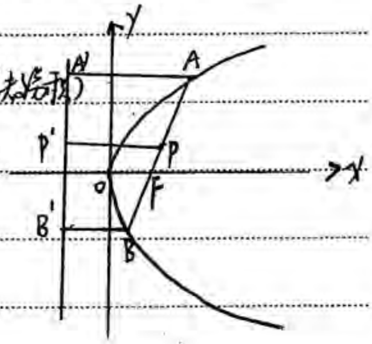
$$\therefore \begin{cases} x_1x_2=\frac{p^2}{4} \\ y_1y_2=-p^2 \end{cases}$$

4. $\angle A'FB'=90^\circ$

例. 如图, AB是过焦点F的动弦, P为AB中点, 选出正确结论

① $FA'\perp FB'$ ✓ ③ $FP'\perp AB$ ✓([illegible])

② $AP'\perp BP'$ ✓(圆) ④ $AP'\perp FA'$ ✓



例1: 求抛物线标准方程

(1) 焦点在直线 $3x-2y-6=0$ 上. $y^2=8x$ 或 $x^2=-12x$

(2) $y^2=2px$ $(p>0)$ 有一点纵坐标为 $-4\sqrt{2}$, 且这个点到准线距离为6, 求p

$p=4$ 或 8

(3) 抛物线与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同焦点, 顶点在原点

$y^2=4\sqrt{2}x$ 或 $y^2=-4\sqrt{2}x$

(4) 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点且倾斜角为[illegible]直线与抛物

线交于A.B 且中垂线过点 Q(5,0)，求抛物线 $y^2=4x$

解: l_{AB}: $y=x-\frac{p}{2}$ l': $y=-x+5$ AB中点为$(\frac{3}{2}p, p)$

$\therefore p=-\frac{3}{2}p+5$ $\therefore p=2$

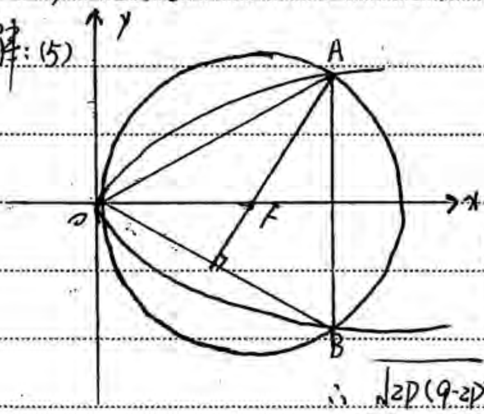
$\therefore y^2=4x$

(5) 顶点在原点O,焦点在x轴上的抛物线与圆 $x^2+y^2-9x=0$ 交于A,B 且 $\triangle OAB$ 垂心为抛物线焦点，求抛物线方程：

$y^2=4x$

(6) 顶点在原点，关于坐标轴对称的抛物线的一条弦所在直线 $y=2x+5$ 且弦的横坐标为 -3，求抛物线方程. $y^2=-4x$

解: (5)



$AF\perp OB$

$\therefore k_{AF}\cdot k_{OB}=-1$

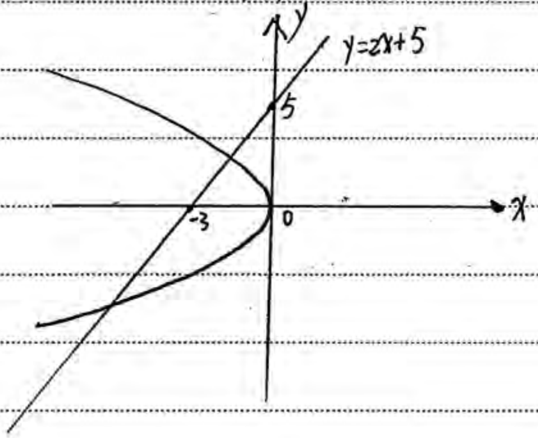
设 $y^2=2px$ $F(\frac{p}{2},0)$

$\begin{cases} y^2=2px \\ x^2+y^2-9x=0 \end{cases} \Rightarrow$ $A(9-2p, \sqrt{2p(9-2p)})$ $B(9-2p, -\sqrt{2p(9-2p)})$

$\therefore \frac{\sqrt{2p(9-2p)}}{9-2p-\frac{p}{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2p(9-2p)}}{9-2p}=-1$ $\therefore p=2$

$\therefore y^2=4x$

(6)



设 $y^2=2px$ $(p>0)$

$\begin{cases} y^2=-2px \\ y=2x+5 \end{cases} \Rightarrow 4x^2+(2p+20)x+25=0$ $\therefore x_1+x_2=-\frac{p+10}{2}$

$\therefore -\frac{p+10}{4}=-3$ $\therefore p=2$ $\therefore y^2=-4x$

例2. 焦半径 焦点弦

(1) 过抛物线 $y^2=4x$ 焦点作直线交抛物线于 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$

且 $x_1+x_2=6$, 求 $|PQ|$ $|PQ|=8$

(2) F为 $y^2=4x$ 焦点, A.B.C为抛物线上的点, $\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=0$

求 $|\vec{FA}|+|\vec{FB}|+|\vec{FC}|=$

(3) $y^2=2px$ $(p>0)$ 上一点 $M(4,y_0)$ 到焦点F距离为5, 求 $S_{\triangle OFM}$, 2

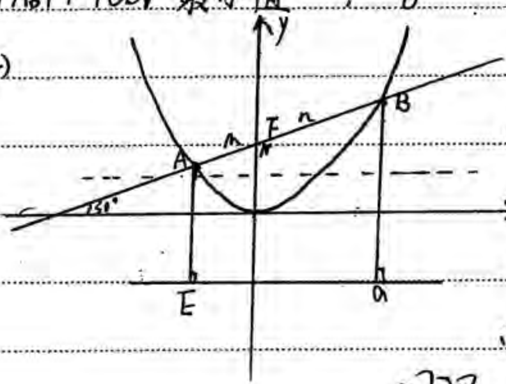
(4) 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 焦点F为倾斜角为30°的直线与抛物线交于A.B (A在y轴左侧), 求 $|AF|:|FB|$ 的值 1:3

(5) 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上横坐标为 $\frac{3}{2}$ 的点到焦点F距离为2.

① 求P值 $\frac{3}{2}+\frac{p}{2}=2$ $\therefore p=1$

② 过抛物线焦点F作相互垂直的两条弦 AB 和 CD. 求 $|AB|+|CD|$ 最小值 . 8

解: (4)



(一) $|AF|=y_1+\frac{p}{2}$

$y_2-y_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+p)$

AB: $\begin{cases} y-\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ x^2=2py \end{cases}$

(二) $|AF|=y_A+\frac{p}{2}=\frac{p}{2}-|AF|\cdot\sin30^\circ+\frac{p}{2}$

$\therefore |AF|=\frac{2}{3}p$

同理: $|FB|=2p$, $\therefore |AF|:|FB|=1:3$

(三) $|BH|$上，$n-m=\frac{1}{2}(m+n)$ ∴ $\frac{n}{2}=\frac{3}{2}m$ ∴ $m:n=1:3$

(5) $x_1+x_2+p=2+\frac{2}{k^2}=|AB|$ $|CD|=2+2k^2$

例3：弦中点.

(1) $y^2=2x$上两点A、B到焦点距离之和为5，求AB中点横坐标. 2

(2) $y^2=8x$上两点M、N到焦点F距离为d_1、d_2，$d_1+d_2=5$，求MN中点P到y轴距离 $\frac{1}{2}$

(3) 过点$P(-1,-1)$引一条抛物线$x=-\frac{1}{8}y^2$的弦，P为弦中点，求直线方程. $y=4x$

(4) 过$y^2=4x$的焦点F做动弦AB，M为AB中点，求点M到直线$y=x$的最短距离

$M(x_0,y_0)$ $l:y=k(x-1)$ $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$

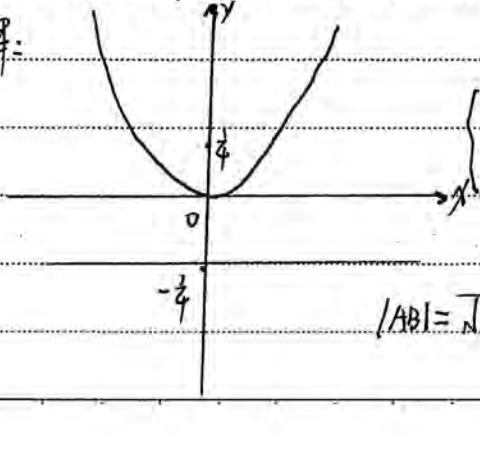
例4. 弦長.

1. 抛物线顶点在原点，焦点在坐标轴上，且被直线$y=x-1$截得弦長AB长为8，求抛物线方程.

$y^2=4x$ 或 $y^2=-8x$ 或 $x^2=-4y$ 或 $x^2=8y$

2. 長度为3的线段AB两端点在抛物线$y=x^2$上移动，若直线AB在y轴上截距为b的范围为$[\frac{7}{8},\frac{9}{4}]$，求AB的斜率范围.

解：



设 $y=kx+b$

$\begin{cases} y=kx+b \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-kx-b=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=k \\ x_1x_2=-b \end{cases}$

$\Delta=k^2+4b>0$ ∴ $k\in R$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+4b}=3$

$\therefore b=\dfrac{9-k^2-kp}{4+4k^2}\in[\frac{7}{8},\frac{9}{4}]$

$k\in[-1,1]$

例5. 最值

1. P在 $y^2=4x$上. 求P到点 $(0,2)$ 距离与P到准线距离之和最小值$\sqrt{5}$

2. P在 $y^2=x$上. 求P到直线 $x-2y+4=0$ 最小距离及此时P坐标

$d=\frac{3\sqrt5}{5}$. $P(1,1)$

3. 已知抛物线 C: $x^2=2y$. 点 $A(0,a)$. 若C上到A距离最近的是C的顶点. 求a范围.

设点为 $(y,\frac{y^2}{2})$

$d^2=y^2+(\frac{y^2}{2}-a)^2=\frac{y^4}{4}+(1-a)y^2+a^2$. $d^2_{max}=a^2$

对称轴为 $y^2=2a-2\geq0$ $\therefore a\geq1$

$\therefore \frac{y^4}{4}+(1-a)y^2\geq0$

设点 (x_0,y_0)

$d=\sqrt{x_0^2-(y_0-a)^2}=\sqrt{y_0^2-(2a-2)y_0+a^2}$

对称轴 $y_1=a-1\leq0$

$\therefore a\leq1$

4. 过 $M(4,0)$ 作直线 l 交 $y^2=4x$ 于 A.B. F为焦点. 求 $S_{\triangle AFB}$ 最小值 12.

5. 过 $y^2=2px\ (p>0)$ 焦点F引两条相互垂直的弦AC和BD. 求 $S_{\triangle BCD}$ 最小值, $8p$

例6. 切线

1. 过点 $(-1,0)$ 作抛物线 $y=x^2+1$ 的切线. 求切线方程

$y=(-2\pm2\sqrt2)(x+1)$

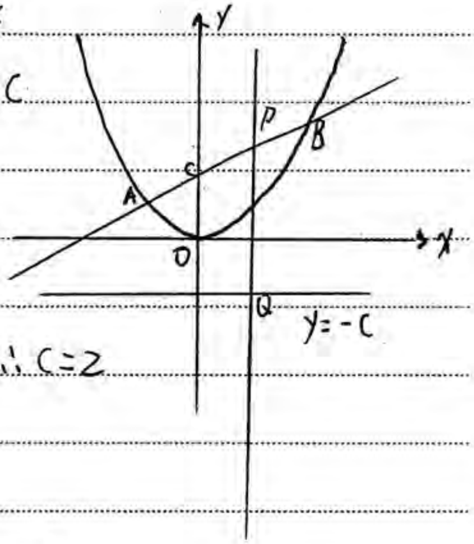
2. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 求 a 值 $a=\frac{1}{4}$

3. 如图, 过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 作直线与 $y=x^2$ 交于 A,B, 一条垂直于 x 轴的直线与线段 AB 和直线 $y=c$ 交于 P,Q

(1) 若 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2$, 求 c 值

(2) 若 P 为线段 AB 中点, 求证: QA 为抛物线切线

解: (1) 设 l_{AB}: $y=kx+c$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$



$\begin{cases} y=kx+c \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-kx-c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=k \\ x_1x_2=-c \end{cases}$

$\therefore y_1y_2=(kx_1+c)(kx_2+c)$

$=k^2x_1x_2+kc(x_1+x_2)+c^2$

$=-k^2c+k^2c+c^2=c^2$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=2$ $\therefore -c+c^2=2$ $\therefore c=2$

(2) $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2c=k^2+2c$

$\therefore P(\frac{k}{2}, \frac{k^2+2c}{2})$ $\therefore Q(\frac{k}{2},-c)$

$k_{AQ}=\dfrac{y_1+c}{x_1-\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{x_1^2+c}{\frac{x_1-x_2}{2}}=\dfrac{x_1^2-x_1x_2}{\frac{x_1-x_2}{2}}=2x_1$

$y=x^2$ $\therefore y'=2x^2$

l_{AB} 在 A 处导数为 $2x_1$

$\therefore QA$ 为抛物线切线

4. 已知抛物线 C: $x^2=2py\ (p>0)$ 上一点 $A(m,4)$ 到焦点距离为 $\frac{17}{4}$

(1) 求 P 和 m 的值

(2) 设 C 上一点 P 横坐标为 $t\ (t>0)$, 过 P 的直线 C 于另一点 Q

交x轴于m. 过Q作PQ垂线交C于N, 若MN是C的切线, 求t最小值

解: (1) $F(0,\frac{p}{2})$

$\frac{17}{4}=\frac{p}{2}+4$ $\therefore p=\frac{1}{2}$. $\therefore F(0,\frac{1}{4})$

$\therefore \frac{17}{4}=\sqrt{m^2+\frac{225}{16}}$ $\therefore m=\pm 2$

(2) 设$P(t,y_0)$ $y_0=\frac{t^2}{2p}$

$\therefore l_{QM}: y-y_0=k(x-t)$

$$\begin{cases} y=k(x-t)+y_0 \Rightarrow x^2-2pkx+(2pkt+t^2)=0 \\ x^2=2py \end{cases}$$

$x_2=k-t$. $x_1=t$

$\therefore Q(k-t,(k-t)^2)$ $M(t-\frac{t^2}{k},0)$

l_{QN}: $x_Q+x_N'=-\frac{1}{k}'$

$\therefore x_N=-\frac{1}{k}+t-k$

$\therefore k_{MN}=\frac{y_N}{x_N-x_M}=\frac{(-\frac{1}{k}-k+t)^2}{-\frac{1}{k}-k+\frac{t^2}{k}}$

$y=x^2 \Rightarrow y'=2x$

$\therefore y'(N)=-\frac{2}{k}-2k+2t=\frac{(-\frac{1}{k}-k+t)^2}{-\frac{1}{k}-k+\frac{t^2}{k}}$

① 当$-\frac{1}{k}+t-k=0$时 $t=k+\frac{1}{k}\geqslant 2$ $\therefore t\in[2,+\infty)$

$\therefore t_{min}=2$

② 当$-\frac{1}{k}-k+t\neq 0$时.

$2t^2-kt=1+k^2$ $\therefore 2t^2-kt-k^2-1=0$ $(t>0)$

$\therefore k^2+tk+(1-2t^2)=0$

$\because \Delta = t^2-4(1-2t^2) \geqslant 0 \quad \therefore t \geqslant \frac{2}{3}$

$\therefore t'_{min} = \frac{2}{3} \quad \therefore$ 综上 $t_{min} = \frac{2}{3}$

概 率

一. 事件

1. 必然事件：在条件S下，一定发生的事件叫做相对于条件S的必然事件

2. 不可能事件：在……，不会……

3. 确定事件：必然事件与不可能事件统称为……

4. 随机事件：在条件S下可能发生也可能不发生的事件

二. 概率定义.

对于给定的随机事件A，如果随着试验次数增加，事件A发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数上，这个常数记为 $P(A)$，称为事件A的概率.

三. 事件的关系与运算

1. 事件的包含关系：如果事件A发生，则事件B一定发生，称事件B包含事件A（或称A包含于事件B），记作 $B \supseteq A$ $(A \subseteq B)$

不可能事件记为 $\emptyset$

2. 相等事件

如果事件A发生，则事件B一定发生，反之亦然，称两事件相等.

记作 $A=B$

3. 并（和）事件

某事件发生当且仅当事件A发生或事件B发生，称此事件为A与B的并事件，记作 $A \cup B$

如：A={出现1点} B={出现2点}，$A\cup B$={出现1或2点}

4. 交(积)事件

某事件发生当且仅当事件A发生且事件B发生，称此事件为A与B的交事件，记作 $A\cap B$

如：A={出现点数大于3}，B={出现点数小于5}，$A\cap B$={出现4点}

5. 互斥事件

若 $A\cap B$ 为不可能事件，称事件A与事件B为互斥事件

如：A={出现1点} B={出现2点} $A\cap B=\emptyset$

6. 对立事件

若 $A\cap B$ 为不可能事件，$A\cup B$ 为必然事件，称事件A与B为对立事件

A的对立事件记为 $\bar{A}$

如：A={出现点数为偶数} B={出现点数为奇数}

对立事件是特殊的互斥事件

四. 概率的几个基本性质

(1) $0\le P(A)\le 1$

(2) 必然事件概率为1，不可能事件概率为0

(3) 若A与B互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(4) 若A与B对立，则 $P(A)+P(B)=1$

五. 古典概型，有限性，等可能性

1. 如果一次试验中所有可能出现的基本事件只有有限个，且每个事件出现的可能性相等，则这个概率模型称为古典概型.

2. 古典概型概率公式

$$P(A)=\frac{A\text{包含基本事件个数}}{\text{基本事件的总数}}$$

例1：盒中有12个球，5红4黑，2白，1绿，从中取出一个球，求
(1) 取出的球是红球或黑球的概率
(2) 取出的球是红或黑，或白的概率
解：(1) 设事件 A={取出一个球为红球}，事件B={取出一个球为黑球}，事件C={取出一个球的事件} D={取出一个球为绿球}
$P(A)=\frac{5}{12}$ $P(B)=\frac{4}{12}$ $P(C)=\frac{2}{12}$ $P(D)=\frac{1}{12}$
$P(\text{红或黑})=P(A)+P(B)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$
(2) $P(\text{红或黑或白})=\begin{cases} ① \frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12} \\ ② 1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12} \end{cases}$

2. 共5个球，3白2黑，从中取出2个
(1) 共有多少个基本事件
(2) 取2球均为白球的概率是多少？
解：记3个白球为 A_1, A_2, A_3，2个黑球为 B_1, B_2
(1) (A_1, A_2) (A_1, A_3) $(A_1 B_1)$ (A_1, B_2) (A_2, A_3) (A_2, B_1) (A_2, B_2)
(A_3, B_1) (A_3, B_2) (B_1, B_2)
∴ 共有10个基本事件
(2) 设2球均为白球为事件A
∴事件A包含3个基本事件
∴ $P(A)=\frac{3}{10}$

3. 含有2个红球，2个白球，从中不放回地连续取3次，每次取一个。

(1) 求恰好有一个红球的概率

(2) 求第三个球是红球的概率

解：记红球为 A_1, A_2. 白球为 B_1, B_2

(A_1, A_2, B_1) (A_1, A_2, B_2) (A_1, B_1, A_2) (A_1, B_1, B_2) (A_1, B_2, A_2)

(A_1, B_2, B_1) (A_2, A_1, B_1) (A_2, A_1, B_2) (A_2, B_1, A_1) (A_2, B_1, B_2)

(A_2, B_2, A_1) (A_2, B_2, B_1) (B_1, A_1, A_2) (B_1, A_1, A_2) (B_1, A_2, A_1)

(B_1, A_2, B_2) (B_1, B_2, A_1) (B_1, B_2, A_2) (B_2, A_1, A_2) (B_2, A_1, B_1)

(B_2, A_2, A_1) (B_2, A_2, B_1) (B_2, B_1, A_1) (B_2, B_1, A_1) (B_2, B_1, A_2)

共24个基本事件

(1) 设恰好有有一个红球为事件A

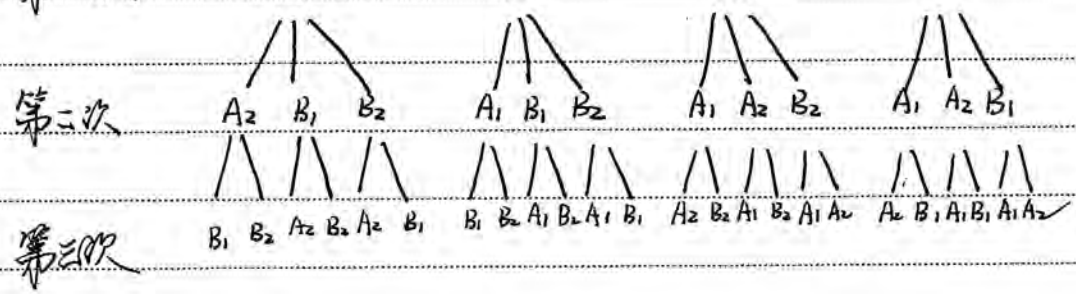
∴事件A包含10个基本事件

∴ $P(A) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

(2) 设第三个球是红球为事件B

∴事件B包含12个基本事件

∴ $P(B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$



几何概型

一、定义：

如果每个事件发生的概率与构成该事件的长度（或S.V）成比例，则称这样的概率模型为几何概型

二、概率公式

$$P(A)=\frac{\text{构成事件A的区域长度(或S.V)}}{\text{该试验全体结果构成的区域长度(或S.V..}}$$

例1：某公交车站每间隔10 min有一趟车经过，若某人随机到达车站，求他等车时间不超过4 min的概率。

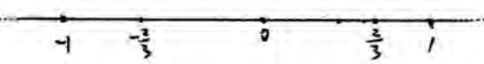
解：事件A构成区域长度为4

全体结果构成区域長度为10.

$\therefore P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

例2：在$[-1,1]$上随机取一个数x，求$\cos\frac{\pi x}{2}$的值界于0到$\frac{1}{2}$之间的概率

$0\le\cos\frac{\pi x}{2}\le\frac{1}{2}$ $\therefore -1\le x\le-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\le x\le 1$



设$\cos\frac{\pi}{2}x$的值界于0到$\frac{1}{2}$为事件A

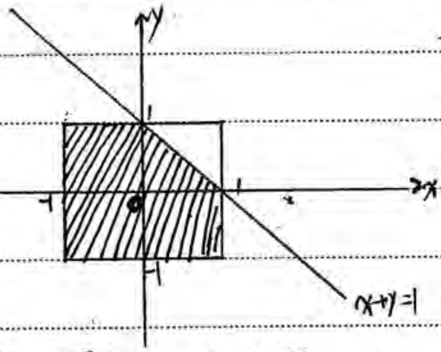
事件A构成区域长度为$\frac{2}{3}$　　A事件表示区域为$\{x\mid -1\le x\le-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\le x\le 1\}$

全体结果构成区域长度为2

$\therefore P(A)=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$　　全体结果表示区域为$\{x\mid -1\le x\le 1\}$

例3：在$[-1,1]$上任取两个实数，求它们的和不大于1的概率

解：设两个实为x,y．事件A为$\{x+y\le 1\}$



事件A表示区域面积为$\frac{7}{2}$

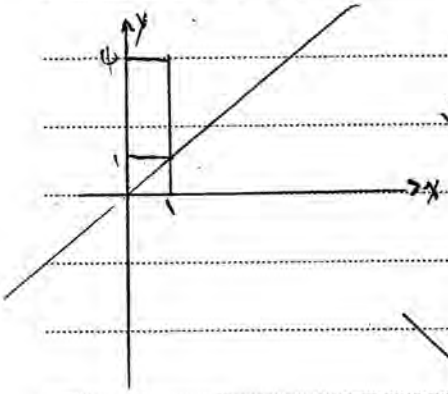
全体结果表示区域面积为4

$\therefore P(A)=\frac{\frac{7}{2}}{4}=\frac{7}{8}$

例4. 已知 $-1\le a\le 1$, $-1\le b\le 1$, 则关于x的方程 $x^2+ax+b^2=0$ 有实根的概率为多少?

解: $\Delta=a^2-4b^2\ge 0$ $\therefore a^2\ge 4b^2$

$\begin{cases}-1\le a\le 1\\ -1\le b^2\le 1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}0\le a^2\le 1\\ 0\le b^2\le 1 \Rightarrow 0\le 4b^2\le 4\end{cases}$

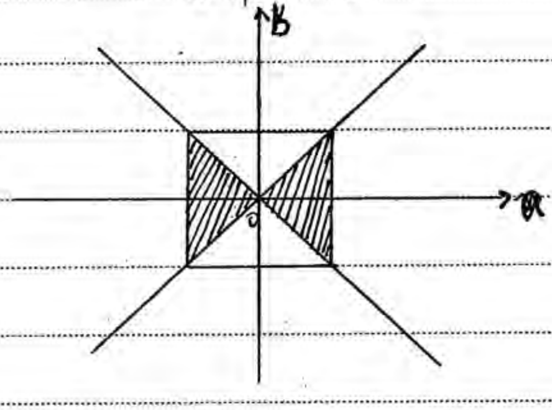


设事件A为 $a^2\ge 4b^2$

$\therefore$ 事件A表示区域面积为$\frac{1}{2}$

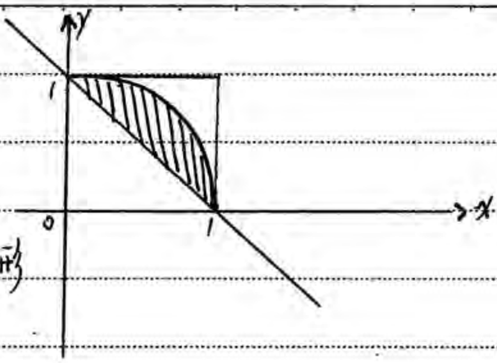
全体结果表示区域面积为4

$\therefore P(A)=\frac{1}{8}$



例5. 在 $0<x<1$, $0<y<1$ 条件下任意 x.y, 求x.y.1.三个数能构成钝角三角形的概率

解：$\begin{cases} x+y>1 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$



事件A为三个数构成钝角三角形

事件A表示区域为 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

全体结果表示区域为 1

$\therefore P(A)= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

例6. 長为12cm，宽为10cm的矩形ABCD内正中心有一个半径为1cm的⊙O，把一枚半径为1cm的硬币任意掷在矩形中（硬币完全落在矩形内部），求硬币不与⊙O相碰的概率

解：设硬币与⊙O相碰为事件A

事件A表示区域面积 $S_A = 80-4\pi$

全体结果表示区域面积为 80

$\therefore P(A)=\frac{80-4\pi}{80} = 1-\frac{1}{20}\pi$

Date No.

已知函数 $f(x)=x^2+ax^2+b \quad (a,b\in R)$

(1)若 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，求 a 的值

(2)设函数 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线为直线 l，若直线 l 在点 A 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象（即动点在点A附近沿曲线 $y=f(x)$ 运动，经过点A时，从直线 l 的一侧进入另一侧），若对于任意 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 b 的最小值

解：(1) $f'(x)=3x^2+2ax$

$\therefore f'(2)=12+4a=0$

$\therefore a=-3$

(2) A不是极值点，为切点，$A(1,\ 1+a+b)$

$k=f'(1)=3+2a \quad \therefore$ 切线 l：$y-(1+a+b)=(3+2a)(x-1)$

$\therefore$ 切线 l：$y=(3+2a)x-2-a+b$

设 $g(x)=f(x)-[(3+2a)x-2-a+b]$

$\therefore g(x)$ 在 $x=1$ 两侧异号

$\therefore x=1$ 不是极值点（若 x 为极值点，则 $x=\alpha$ 两侧同号）

$\therefore g(x)=(x^3+ax^2+b)-[(3+2a)x-2-a+b]$

即 $g(x)=x^3+ax^2-(3+2a)x+2+a$

$\therefore g'(x)=3x^2+ax^2-(3+2a)=[3x+(3+2a)](x-1)$

$g'(x)=0 \Rightarrow x=1$ 或 $x=-\frac{3+2a}{3}$ （若 $f'(x)=2x^2\geq 0$，$f(x)$ 没有极值点）

$\therefore 1=-\frac{3+2a}{3} \quad \therefore a=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+b$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值	↓	极小值	↑

$\therefore f(x)_{min}=f(2)=8-12+b\geq 0$

$\therefore b\geq 4$

$\therefore b$ 的最小值为4

复　数

一. 概念

1. i 的定义（虚数单位）

① $i^2=-1$

② i 可以与实数进行运算　$(3+i, 2i)$

2. 复数定义

形如 $a+bi$　$(a,b\in R)$ 的数叫做复数，全体复数组成的集合叫做复数集（　）

3. 形如 $a+bi$　$(a,b\in R)$ 中 a 为实部　b 为虚部

4. 复数分类　$a+bi$ $(a,b\in R)$

(1) $b=0$　：实数

(2) $b\neq 0$　：虚数

(3) $a=0$，$b\neq 0$，纯虚数

(4) $a\neq 0$，$b\neq 0$，非纯虚数

5. $a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

6. 几何意义

复数 $a+bi$ 与复平面内的点 (a,b) 一一对应，x轴为实轴，y轴为虚轴

7. 共轭复数

实部相等，虚部互为相反数的两个复数．$a+bi$ 与 $a-bi$

8. 复数的模

$z=a+bi$ 的模，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

二、复数的运算

1. 加减 $z_1=a+bi$ $z_2=c+di$

$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$

2. 乘法

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)(ad+bc)i$

3. 指数运算

$z^m\cdot z^n=z^{m+n}$ $z^0=1\quad(z\neq0)$

$(z^m)^n=z^{mn}$

4. 除法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

不等式

一、不等式性质

二、均值不等式

1. 重要不等式

$a,b\in R$，则 $a^2+b^2\geq 2ab$ （$a=b$，取"="）

2. 均值不等式

$a.b\in R^+$，则 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ （$a=b$，取"="）

变形. $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$ ⟩ $a\cdot b\in R$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\geq a+b$

3. 均值不等式的应用

(1) 和为定值，则乘积为最大值：$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(2) 积为定值，则和有最小值：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

一正，二定，三等

4. 推广

$a.b\in R^+$，则 $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ （$a=b=c$，取"="）

变形：$abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

例1：求最值

(1) $y=\frac{1}{x-3}+x$ $(x>3)$ 最小值

$y=\frac{1}{x-3}+(x-3)+3\geq 2+3=5$

$\therefore y_{min}=5$

(2) $x>0$，$y>0$ 且 $x+y+xy=2$，求 $x+y$ 最小值

$x+y=2-xy$ $\because xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$ $\therefore 2-xy\geq 2-\frac{(x+y)^2}{4}$

$\therefore x+y \geq 2-\frac{(x+y)^2}{4}$ $\therefore x+y \geq 2\sqrt{3}-2$

(3) $x, y \in R^+$, $4y+x=1$, 求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 最小值

原式 $=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(4y+x)=\frac{4y}{x}+1+4+\frac{x}{y}=5+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 5+2\sqrt{4}=9$

$\therefore$ 最小值为9. 当且仅当 $x=2y$ 时. 取"="

(4) $0<x<1$. 求 $\frac{4}{x}+\frac{9}{1-x}$ 最小值

原式 $=(\frac{4}{x}+\frac{9}{1-x})[x+(1-x)]=4+\frac{4(1-x)}{x}+\frac{9x}{1-x}+9=13+\frac{4(1-x)}{x}+\frac{9x}{1-x}$

$\geq 13+12=25$

$\therefore$ 最小值为25

(5) $x<y$ 且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq a\sqrt{x+y}$ 恒成立. 求a最小值

$a\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ $\therefore a^2\geq\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$

$\because 2\sqrt{xy}\leq x+y$

$\therefore \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}<1$

$\therefore a^2\geq 2$ $\therefore a\geq\sqrt{2}$. $\therefore a_{min}=\sqrt{2}$

例2: 求值域

(1) $y=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$ $(x>1)$ 值域

$y=(x+1)+\frac{5}{x+1}-5$

$\geq 2\sqrt{5}-5$

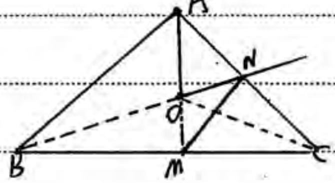
$\therefore y\in[2\sqrt{5}-5,+\infty)$

(2) $y=\frac{2x}{x^2+1}$ $(x>0)$ 值域

$x^2+1\geq 2x$

$\therefore \frac{2x}{x^2+1}\leq 1$

$\therefore y\leq 1$ $\therefore y\in(-\infty,1]$



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{0}$

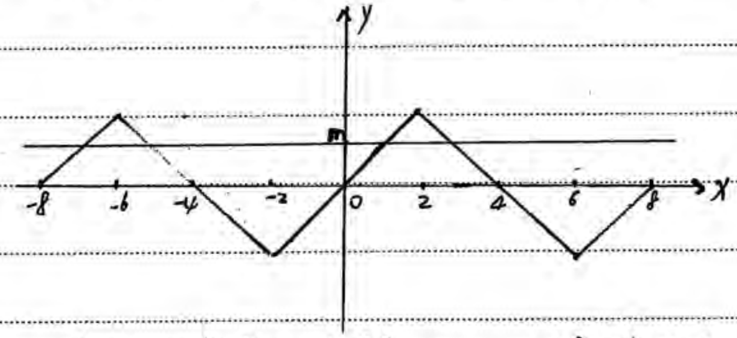
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$与$-2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$共线

O.M.N 共线

O 在中位线MN上偏向M的一个三等分点

1. 定义在R上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x-4)=-f(x)$ 且在 $[0,2]$ 上是增函数，若方程 $f(x)=m\ (m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有4个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=-8$

解：$T=8$. 用 $x+4$ 换 $x \Rightarrow f(x)=-f(x+4) \Rightarrow f(x+4)=-f(x)$，用 $x+4$ 换 $x \Rightarrow f(x+8)=-f(x+4)=-f(x)$



2. 方程 $(\frac{1}{9})^x+(\frac{1}{3})^{x-1}+a=0$，有正数解，则 a 的范围 $(-4,0)$

解：$a=-[(\frac{1}{3})^x]^2-3\times(\frac{1}{3})^x$ 令 $t=(\frac{1}{3})^x$，$x>0$ 时，$t\in(0,1)$

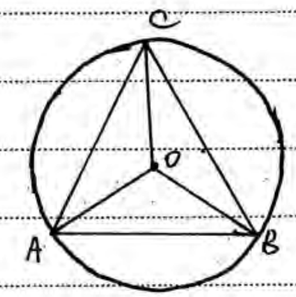
$\therefore a=-t^2-3t=-(t+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4} \in (-4,0)$

$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

则 $\angle\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=$

解：$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$



单位圆

$4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA}$

$\therefore (4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC})^2=9|\overrightarrow{OA}|^2$

$\therefore 16+25+40-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=9$

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{4}{5}$

同理：$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-\frac{3}{5}$

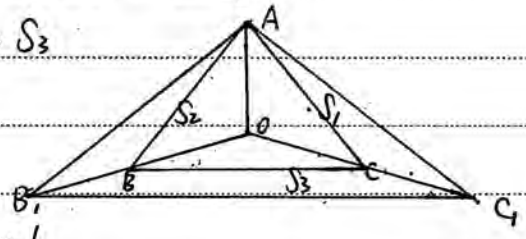
$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}$

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$S_{\triangle OAC}:S_{\triangle ABC}=\underline{1:3}$

$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{3}S_1$ $\qquad S_1=S_2=S_3$

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}S_2$

$\rightarrow$ $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{6}S_3$



$\therefore S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OBC}=2:3:1$

重心与三角形三点连线将$S_\triangle$三等分

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$1+\sin\theta = (\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2$$
$$1-\sin\theta = (\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2$$

锐角三角形：任何两个内角和$>\frac{\pi}{2}$

任何一个内角正弦大于其余两角余弦

任何两边平方和$>$第三边平方

三角形内心、重心在三角形内，外心和垂心不一定

但锐角三角形外心和垂心一定在三角形内

2. β为锐角．$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$． $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$

① 证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$

② 证：$\tan\beta\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$

解：① 证：$3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$

$3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$\therefore 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$

② 证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$

$\therefore \tan\beta=\dfrac{\tan\alpha}{1+2\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{\frac{1}{\tan\alpha}+2\tan\alpha}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

当且仅当 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取"="

1. ΔABC 三边 $a.b.c$ 成等比，B的范围为 $(0,\frac{\pi}{3}]$

2. ΔABC 三边 $a.b.c$ 成等差，B的范围为 $(0,\frac{\pi}{3}]$

3. ΔABC 中，$3\sin A+4\cos B=6$ ① $3\cos A+4\sin B=1$ ② 则 $C=\frac{\pi}{6}$

解：(1) $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-ac}{2ac}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$ $\therefore B\in(0,\frac{\pi}{3}]$

(2) $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}=\dfrac{\frac{3}{4}(a^2+c^2)-\frac{ac}{2}}{2ac}=\dfrac{\frac{3}{4}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{2}}{2}\ge\frac{1}{2}$

$\therefore B\in(0,\frac{\pi}{3}]$

(3) ①^2+②^2：$25+24\sin A\cos B+25+24\cos A\cdot\sin B=37$

$\therefore \sin(A-B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

① α为锐角，则 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$ $\quad\therefore C=\frac{\pi}{6}$

② 若 $C=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore A<\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore \sin A<\frac{1}{2}$

$\therefore 4\cos B=6-3\sin A>\frac{9}{2}$

$\therefore \cos B>\frac{9}{8}$ $\quad\therefore$ 不成立

数形结合

1. x,y 满足 $x^2+y^2-4x+1=0$，则 $\frac{y}{x}$ 最大值为 $\sqrt{3}$

2. $0<a<1$ 方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 实根个数 2

3. $\triangle ABC$ 中，对任意 m 均有 $|\overrightarrow{BA}-m\overrightarrow{BC}|\geq|\overrightarrow{AC}|$，则 $\triangle ABC$ 形状 直角三角形

4. 设 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y+2\geq0\\8x-y-4\leq0\\x\geq0,\ y\geq0\end{cases}$，若目标函数 $z=abx+y$ $(a>0,b>0)$ 最大值为8，则 $a+b$ 最小值为4

5. $x\in(0,\pi]$，方程 $2\sin(x+\frac{\pi}{3})=a$，有两个不同实根，则 a 的范围 $(\sqrt{3},2)$.

6. 已知P是直线 $3x+4y+8=0$ 上动点，PA、PB是圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的两条切线是切点，C为圆心，则四边形PACB面积最小值 $2\sqrt{2}$

7. 等差数列 $\{a_n\}$，$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，则当 S_n 取最大值时，$n=6$

8. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-6x$ 在 $[-1,2]$ 上单调递减，则 $a+b$ 最小值 $\frac{3}{2}$

$\begin{cases}f'(-1)\leq0\\f'(2)\leq0\end{cases}$ $t=a+b$

$x^2+y^2=4$，P为圆外任意一点，PA·PB为切线，A·B为切点，求 $\vec{PA}\cdot\vec{PB}$ 最小值

椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上一点P，圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 的直径为EF，求 $\vec{PE}\cdot\vec{PF}$ 最大值

化归与转化

普遍代数 → 几何

几何 → 坐标化（解析）

代数 → 三角

向量坐标化

则 $a>0$, $b>0$. $a^2+b^2=1$. $A(1,a)$ $B(b,1)$ 求 $S_{\triangle AOB}$ 范围.

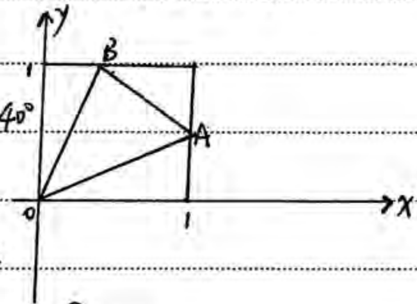
令 $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$. $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

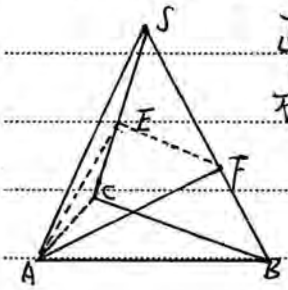
$$S_{\triangle AOB}=1-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta \qquad \theta\in(0,\pi) \quad \therefore \sin2\theta\in(0,1]$$

$\therefore S_{\triangle AOB}\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$



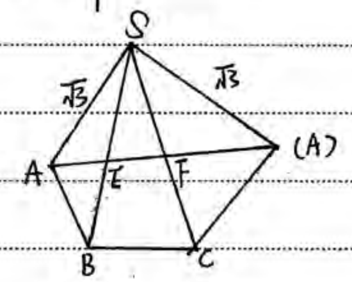


正三棱锥 $\angle ASB=\angle ASC=\angle BSC=40^\circ$

棱长 $=\sqrt{3}$. E.F 为任意中点.

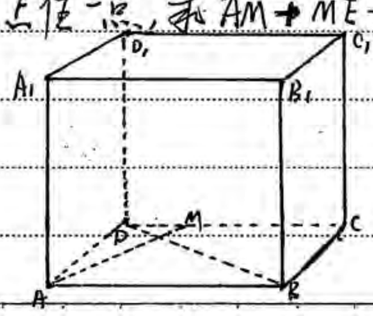
求 $\triangle AEF$ 周长最小值 为3

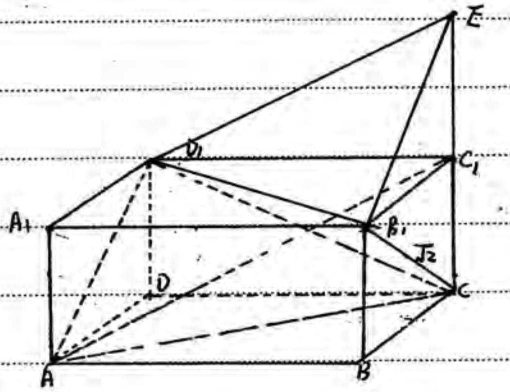
解: 沿 SA 展开.



E为 A_1A 中点, M是面 BDD_1B_1 上任一点, 求 $AM+ME$ 最小值

$AM+ME=CE=\frac{\pi}{2}a$





长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 在棱 CC_1 延长线上，且 $CC_1 = C_1E =$
$BC = \frac{1}{2}AB = 1$

求证：(1) $D_1E \parallel$ 平面 ACB_1

(2) 平面 $D_1B_1E \perp$ 平面 DCB_1

(3) 求四面体 $D_1B_1AC_1$ 体积

证：(1) 连接 AD_1

$\because C_1E = CC_1$，$\therefore B_1E = BC_1 = AD_1$ 且 $D_1E \parallel BC_1 \parallel AD_1$.

$\therefore$ 四边形 AB_1ED_1 是平行四边形

$\therefore D_1E \parallel AB'$

$\therefore D_1E \parallel$ 平面 ACB_1

(2) $B_1E = B_1C = \sqrt{2}$，$CE = 2 \Rightarrow B_1E \perp B_1C \Rightarrow$ 面 $D_1B_1E \perp$ 面 DCB_1

$DC \perp$ 面 CEB_1 $\therefore EB_1 \perp DC$

(3) $V_{D_1-ACB_1} = V_{E-AB_1C} = V_{A-B_1CE} = \frac{1}{3} \times 2 \times (\frac{1}{2} \times 2 \times 1) = \frac{2}{3}$

$a>0, b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b} \geq 0$ 恒成立．求 k 的最小值为 -4

$-k \leq 2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 4$

$\therefore -k \leq 4$．$\therefore k \geq -4$

$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>1$ 恒成立，求 a 范围

解：$\lg f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg e^{-ax}$

$\because f(x)>1$ $\therefore \lg f(x)>0$

$\therefore \lg\frac{1+x}{1-x}>-\lg e^{-ax}$

$\therefore \lg\frac{1+x}{1-x}>\lg e^{ax}$ $\therefore \frac{1+x}{1-x}>e^{ax}$

$\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}>1$ $\therefore e^{-ax}>\frac{1-x}{1+x}$

即 $-ax>\ln(1-x)-\ln(1+x)$

$\therefore ax+\ln(1-x)-\ln(1+x)<0$

令 $g(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)+ax$

$g(0)=0$， $\therefore g(x)<g(0)$

$g'(x)=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+a=\frac{-2}{1-x^2}+a=a-\frac{2}{1-x^2}$

$\because x\in(0,1)$ $\therefore 1-x^2\in(0,1)$ $\therefore \frac{2}{1-x^2}\in(2,+\infty)$

① 当 $a\le 2$ 时，$g'(x)\le 0\downarrow$. $g(x)<g(0)=0$

② 当 $a>2$ 时，$g'(x)=a-\frac{2}{1-x^2}=0$ $\therefore x=\sqrt{1-\frac{2}{a}}\in(0,1)$

$\therefore (0,\sqrt{1-\frac{2}{a}})\uparrow$ $(\sqrt{1-\frac{2}{a}},1)\downarrow$

$\because g(0)=0$. $\therefore g(x)$ 在 $(0,\sqrt{1-\frac{2}{a}})$ 为正 $\therefore$ 不成立

$\therefore$ 综上，$a\le 2$

解析

1. 椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$A_1$，$A_2$ 为左右顶点，直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C 交于 A.B 两点（A.B 不是左右顶点），若 $AA_2 \perp BA_2$

求证：直线 l 过定点并求该点坐标

解：$A_1(-2,0)$　$A_2(2,0)$　设 $A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2+3)x^2+8mkx+(4m^2-12)=0$$

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8mk}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$$

$\Delta>0 \Rightarrow 4k^2-m^2+3>0$

$\because AA_2 \perp BA_2$　$\therefore \overrightarrow{AA_2} \perp \overrightarrow{BA_2}$

$\because \overrightarrow{AA_2}=(x_1-2, y_1)$　$\overrightarrow{BA_1}=(x_2-1, y_2)$

$\therefore (x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$　$\therefore 7m^2+4k^2+16mk=0$　$\therefore \frac{m}{k}=-2$ 或 $-\frac{2}{7}$

① $\frac{m}{k}=-2$ 即 $m=-2k$，$\therefore l: y=kx-2k=k(x-2)$ 定点 $(2,0)$ 舍

② $\frac{m}{k}=-\frac{2}{7}$ 即 $m=-\frac{2}{7}k$，$\therefore l: y=kx-\frac{2}{7}k=k(x-\frac{2}{7})$ 定点 $(\frac{2}{7},0)$

2. 已知定点 $C(-1,0)$，椭圆 $x^2+3y^2=5$，过点 C 的动直线与椭圆交于 A.B 两点，在 x 轴上是否存在点 M，使 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 为常数？

解：设 $M(m,0)$　① $l_{AB}: y=k(x+1)$　$A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$

$\overrightarrow{MA}=(x_1-m, y_1)$　$\overrightarrow{MB}=(x_2-m, y_2)$

$$\begin{cases} y=k(x+1) \\ x^2+3y^2=5 \end{cases} \Rightarrow (3k^2+1)x^2+6k^2x+(3k^2-5)=0 \quad \therefore \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1} \\ x_1x_2=\frac{3k^2-5}{3k^2+1} \end{cases}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow 12k^2+5 > 0 \quad \therefore k \in R$

$\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2 = x_1x_2 - m(x_1+x_2) + m^2 + y_1y_2$

$= \dfrac{(3m^2+6m-1)k^2+m^2-5}{3k^2+1} = a$

$\therefore (3m^2+6m-1)k^2+m^2-5 = 3ak^2+a$

$\therefore \begin{cases} 3m^2+6m-1 = 3a \\ m^2-5 = a \end{cases} \Rightarrow m = -\dfrac{7}{3} \quad \therefore$ 存在，$M(-\dfrac{7}{3}, 0)$

② 当 k_{AB} 不存在时：l_{AB}: $x=-1$

$\therefore A(-1, \frac{2}{\sqrt{3}}) \qquad B(1, \frac{2}{\sqrt{3}})$

$\therefore \overrightarrow{MA} = (-1-m, \frac{2\sqrt{3}}{3}) \qquad \overrightarrow{MB} = (1-m, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

$\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = m^2-1+\frac{4}{3} = m^2-\frac{1}{3} \quad \therefore m = -\frac{7}{3}$ 成立

$\therefore$ 综上：$M(-\frac{7}{3}, 0)$

$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0$ 且 $a \neq 1) \qquad (e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

观察

① $\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cdot \cos 50° = \frac{3}{4}$

② $\sin^2 15° + \cos^2 45° + \sin 15° \cdot \cos 45° = \frac{3}{4}$

分析特点，写出反映一般规律的式子，并证明。

式子：$\sin^2\alpha + \cos^2(\alpha+30°) + \sin\alpha \cdot \cos(\alpha+30°) = \frac{3}{4}$

证：左边 $= \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} + \dfrac{1+\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})}{2} + \sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)$

$= 1+\frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})-\cos 2\alpha\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$= 1+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right]+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$= 1-\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{3}{4}$

已知双曲线渐近线方程 $y=\pm\frac{2}{3}x$，则该双曲线离心率

$e=\frac{\sqrt{13}}{3}$ 或 $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

思维方法

1. 分析与综合

↓ 从论证入手　↓ 从条件入手

2. 一般与特殊

定义在R上的奇函数为 $f(x)$，周期为T，则 $f(x)=0$ 在 $[-T,T]$ 上解的个数至少有5个。

$f(-\frac{T}{2})=-f(\frac{T}{2})$

$f(-\frac{T}{2})=f(\frac{T}{2})$　$\therefore -f(\frac{T}{2})=f(\frac{T}{2})$　$\therefore f(\frac{T}{2})=0$

3. 换个角度看问题

设 $a>1$，若仅有一个常数 c，使得对 $\forall x\in[a,2a]$ 都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=1$，则 a 的取值集合 $\{2\}$

$\log_a x+\log_a y=c \Rightarrow y=\frac{a^c}{x}$ 递减

$\therefore y\in\left[\frac{a^c}{a},\frac{a^c}{2a}\right]$

$\therefore \begin{cases} \frac{a^2}{2a} \geq a \\ \frac{a^2}{a} \leq a^2 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a^2 \geq 2a^2 \\ ac \leq a^3 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 \leq a^2 \leq a^3$ $\therefore 2+\log_a 2 \leq c \leq 3$

$\therefore 2+\log_a 2 = 3$ $\therefore a=2$

4. 克服思维定式

$\triangle ABC$中 满足 $|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$ 恒成立, 则 $\angle C=$

$\overrightarrow{D_1D} = t\overrightarrow{BC}$

$\therefore |\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}| \geq |\overrightarrow{AC}|$

$\therefore |\overrightarrow{DA}| \geq |\overrightarrow{AC}|$

5. 要有点预测能力

定义在R上函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2(1-x) & x\leq 0 \\ f(x-1)-f(x-2) \ ① & x>0 \end{cases}$ 则 $f(2011)=$

$T=6$

同 $x+1$ 代 x

$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ ② ①+②得:

$\therefore f(x+1)=-f(x-2)$

$f(x+3)=-f(x)$

$\therefore T=6$

6. 思维的深刻性

(1) 设 $0<a<b$ 且 $f(x)=|\ln x|$, $f(a)=f(b)$, 则 $a+3b$ 的范围

$-\ln a=\ln b$ $\therefore ab=1.$ $\Rightarrow a=\frac{1}{b}$

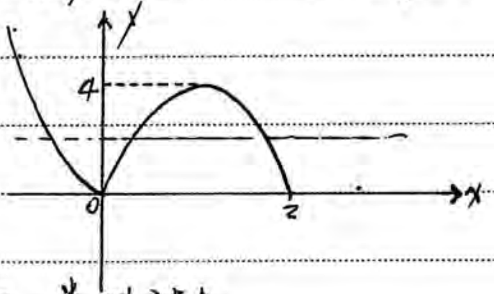
[$a+3b \geq 2\sqrt{3ab}=2\sqrt{3}$ 当且仅当 $a=3b$ 时取"=" 但 $a\neq 3b$]

$a+3b=\frac{1}{b}+3b \ (b>1)$ $\therefore a+3b \in (4,+\infty)$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 45-x & 0\le x\le \pi \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=0$ 的解的个数2个

令 $f(x)=t$

$\therefore f(t)=0$ $\therefore t=0$ 或 π. $\therefore f(x)=0$ 或 $f(x)=\pi$



7. 数形结合

(1) 函数式与函数图象

(2) 不等式与函数图象

(3) 圆与方程

(4) 代数式结构特点

(5) 概念自身有何特点

(6) 可行域与目标函数

(7) 利用向量的双重性 $\begin{cases} \text{几何} \\ \text{代数} \end{cases}$

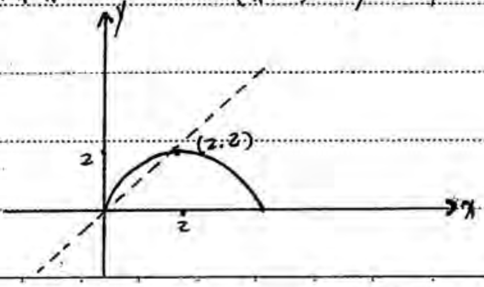
不等式 $\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$ 解集为A, 且 $A\subseteq\{x\mid 0<x<2\}$ 则

$a\in[2,+\infty)$

$y=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4 \quad (y\ge 0)$

$\therefore a-1\ge 1$

$\therefore a\ge 2$



$1<m\le e$，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-(m+1)x+m\ln x$，证明：对 $\forall x_1,x_2\in[1,m]$

恒有变换主元 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$

证：$\forall x\in[1,m]$：$f'(x)=\frac{(x-1)(x-m)}{x}<0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1,m]\downarrow$

$\therefore f(x)_{max}=f(x_1)=f(1)=\frac{1}{2}-(m+1)=-m-\frac{1}{2}$

$f(x)_{min}=f(x_2)=f(m)=\frac{1}{2}m^2-m(m+1)+m\ln m$

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|\le f(1)-f(m)=\frac{1}{2}m^2-m\ln m-\frac{1}{2}$

即 $\frac{1}{2}m^2-m\ln m-\frac{1}{2}<1$

即 $\frac{1}{2}m-\ln m=\frac{3}{2m}<0$

令 $h(m)=\frac{1}{2}m-\ln m-\frac{3}{2m}$

$h'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}+\frac{3}{2m^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>0$

$\therefore h(m)$ 在 $[1,e]$ 递增

$\therefore h(m)\le h(e)=\frac{e}{2}-1-\frac{3}{2e}=\frac{(e-3)(e+1)}{2e}<0$

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|<1$

1. 某市2010年4月1日至4月30日，时空气污染指数监测数据如下：

61、76、70、56、81、91、92、93、75、81、88、67、101、103、95、91、77

86、81、83、82、82、64、79、86、85、75、71、49、45

(1) 完成频率分布表

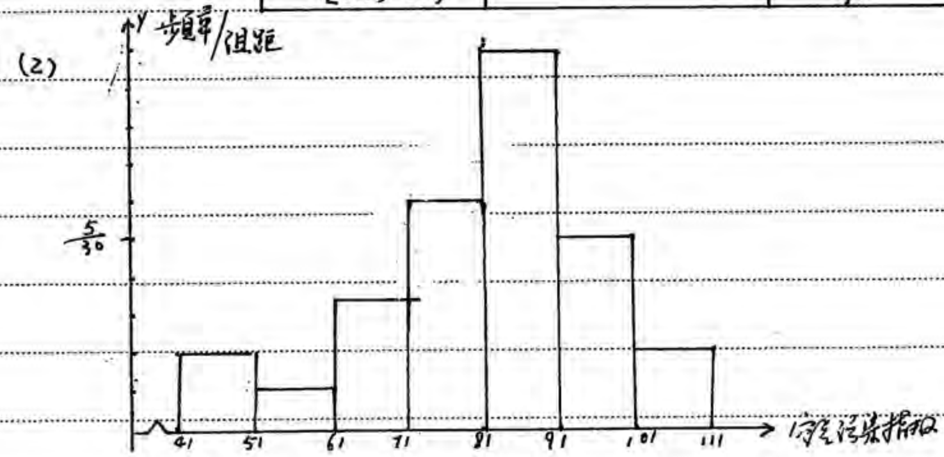
(2) 作出频率分布直方图

(3) 根据国家标准，污染指数在0~50之间质量为优，51~100为良，101~150为轻污染，151~200为轻度污染，根据以上数据以上数据和上述标准对该空气质量给出评价

解：(1) 频率分布表

分组	频数	频率
[41, 51)	2	$\frac{2}{30}$
[51, 61)	1	$\frac{1}{30}$
[61, 71)	4	$\frac{4}{30}$
[71, 81)	6	$\frac{6}{30}$
[81, 91)	10	$\frac{10}{30}$
[91, 101)	5	$\frac{5}{30}$
[101, 111)	2	$\frac{2}{30}$

(2)



(3) 该市一周中有两天处于优的水平，占当月当天数 $\frac{1}{15}$

有21天处于良的水平，占当月天数 $\frac{7}{10}$

该市空气质量良好

一个袋中装有4个大小形状相同球，编号分别为 1, 2, 3, 4

(1) 从中随机取2个球，求取出球编号之和不大于4的概率

(2) 先从中随机取一个球，该球编号为 m，将球放回袋中，再从中随机取一个球，编号为 n，求 $n < m+2$ 的概率

解：(1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4) 共有6个基本事件 设事件 $A = \{$球编号之和不大于4$\}$

事件 A 包含2个基本事件

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(2) (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4)

共16个基本事件

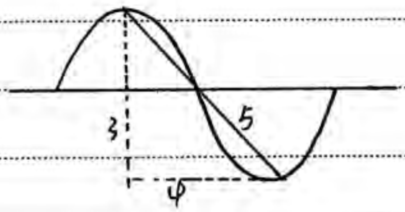
设事件 $B = \{n < m+2\}$

事件 B 包含13个基本事件

$\therefore P(B) = \frac{13}{16}$

已知 $f(x) = \frac{3}{2}\sin(\omega x + \varphi)$ 相邻最高点和最低点距离为5，求 ω

$\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|\omega|} = 5$ $\therefore \omega = \pm\frac{\pi}{5}$



$\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|w|} = 4$. ∴ $w = \pm\frac{\pi}{4}$

锐角三角形ABC. $A = 2B$. 则 $\frac{b}{b+c}$ 的范围 $\underline{(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})}$

$$\begin{cases} 0 < 2B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3B < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4} \quad \therefore \frac{1}{2} < \sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{b+c}{b} = \frac{\sin B + \sin(\pi - 3B)}{\sin B} = 1 + \frac{\sin 3B}{\sin B} = 1 + \frac{3\sin B - 4\sin^3 B}{\sin B}$$

$$= 1 + 3 - 4\sin^2 B = 4 - 4\sin^2 B$$

∴ $\frac{b+c}{b} \in (2, 3)$

∴ $\frac{b}{b+c} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$\triangle ABC$中. $a\cos B - b\cos A = \frac{3}{5}c$. 求 $\tan(A-B)$ 最大值

解: $\sin A\cos B - \sin B\cos A = \frac{3}{5}\sin C = \frac{3}{5}\sin(A+B)$

∴ $\sin A\cos B = 4\cos A \cdot \sin B$

∴ $\tan A = 4\tan B$ ∴ A.B是锐角

∴ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} = \frac{3\tan B}{1 + 4\tan^2 B} = \frac{3}{\frac{1}{\tan B} + 4\tan B} \le \frac{3}{4}$

当且仅当 $\tan B = \frac{1}{2}$. 取"="

∴ 最大值为$\frac{3}{4}$.

$\triangle ABC$中，$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}-\vec{AC}|=2$，则$\triangle ABC$面积最大值为 $\underline{3\sqrt{7}}$

解：$|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos A=2$

$\vec{AB}^2+\vec{AC}^2-2\vec{AB}\cdot\vec{AC}=4$，

$\therefore \vec{AB}^2+\vec{AC}^2=8\geq 2\sqrt{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}$ $\quad \vec{AB}^2\cdot\vec{AC}^2\leq 256$

$S_\triangle=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^2\cdot\vec{AC}^2(1-\frac{4}{|\vec{AB}|^2\cdot|\vec{AC}|^2})}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^2\cdot\vec{AC}^2-4}\leq 3\sqrt{7}$

① $\vec{PG}=\frac{1}{3}(\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC})\iff G$为$\triangle ABC$重心

特别：$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}\iff P$为$\triangle ABC$重心

② $\vec{PA}\cdot\vec{PB}=\vec{PB}\cdot\vec{PC}=\vec{PC}\cdot\vec{PA}\iff P$为$\triangle ABC$垂心

$|\vec{OA}|^2+|\vec{BC}|^2=|\vec{OB}|^2+|\vec{AC}|^2=|\vec{OC}|^2+|\vec{AB}|^2\iff O$为$\triangle ABC$垂心

$(|\vec{OA}|^2-|\vec{OB}|^2)+(|\vec{BC}|^2-|\vec{AC}|^2)=\vec{0}$

$\therefore (\vec{OA}+\vec{OB})(\vec{OA}-\vec{OB})+(\vec{AC}+\vec{BC})(\vec{AC}-\vec{BC})=\vec{0}$

$\therefore (\vec{OA}+\vec{OB})\cdot\vec{BA}+(\vec{AC}+\vec{BC})\cdot\vec{BA}=\vec{0}$

$\therefore \vec{BA}\cdot 2\vec{OC}=\vec{0}$ $\qquad \therefore \vec{OC}\perp\vec{BA}$

1. 若动点P与定点Q (x_0,y_0) 和定直线 $l: Ax+By+C=0$ 距离相等，则动点P的轨迹是什么形状？抛物线或直线

①当Q不在 l 上为抛物线

②当Q在 l 上为直线

2. 同一平面上 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两成角相等，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$

则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=6$ 或 $\sqrt{3}$

成角为 $\frac{2\pi}{3}$ 或 0

3. 从空间一点发出4条射线，它们两两成角均为θ，问 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ 或1.